This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06640685 5

1798
Archimedes
ED

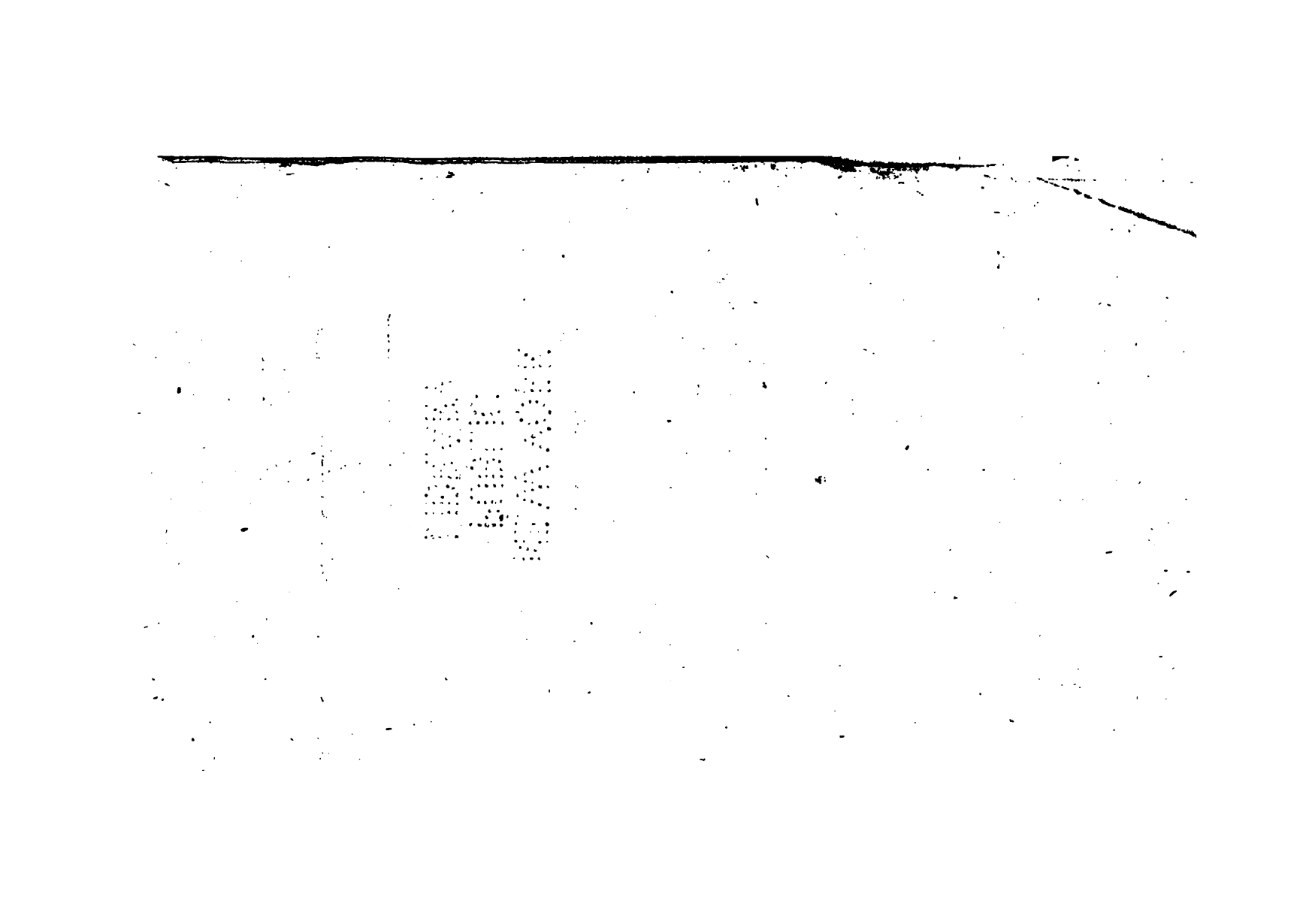
Lorsimer erstes Buch über d. Eyl. P. 1.
zweites — — — — „ 67.
Dritten Buch — — — — „ 101.
Die Lehre findet sich auch in Samuel Speir.
Asaph. III. p. 57.
Luc. Valerius üb: Segel, Segelschiffen d. Segel.
einzelne — — — — — P. 109.
Torricelli über die Bewegung schwer regel.
förmiger Körper . . . . P. 137.

ARCHIMEDS
zwey Bücher
über
KUGEL und CYLINDER
Ebendesselben
KREISMESSUNG.

Uebersezt,
mit Anmerkungen
und einem Anhang von Säzen über Kugel, Kugelstüke, und durch Umdrehung ebener regulärer Figuren entstehende Körper aus Lucas Valerius, Tacquet und Torricelli
begleitet
von
KARL FRIDERICH HAUBER.

Mit sechs Kupfertafeln.

Tübingen,
in der J. G. Cotta'schen Buchhandlung. 1798.



Vorrede.

Es wird mit wenigem gesagt seyn, was von dem Herausgeber über diese Arbeit zu bemerken seyn mag.

Die Uebersezung der Archimedischen Bücher ist, so viel möglich, wörtlich gemacht. An vielen Orten sind zur Abkürzung die gewöhnlichen mathematischen Zeichen gebraucht. Die Citationen Euklidischer oder vorhergegangener Archimedischer Säze, und hie und da einige zur Erläuterung oder als nothwendig zum Zusam-

menhang *) eingeschalteten Worte sind von denen, die aus dem griechischen Text, so wie wir ihn jezt haben, übersezt sind, jedesmal durch ( ) unterschieden. Einigemal ist etwas weggelassen worden, das sich im griechischen Texte findet **): besonders Worte, die eine Berufung auf Lehnsäze oder Erläuterungen, welche sich im Text

---

*) Wie die Worte: „Da nun - - - dieser Kreis". Seite 60. Z. 31—43;
die Worte: „in der andern - - - fallen". S. 99. Z. 8—12.
Beyde Stellen sind auch bey *Rivaltus* und *Sturm* ergänzt. Bey der leztern ist die zu p. 198. lin. 1. in der Oxforter Ausgabe gesezte Vermuthung „Credi„derim glossema esse" ungegründet.

**) Der Seite 28. in der Anm. erwähnte Lehnsaz, der zum Beweis des XVIIten Sazes nichts nüzt;
die Worte „ως τετραπλ. γινεσθαι" p. 103. l. 15. der Oxf. Ausg.
Vgl. über leztere Stelle die Recension der Oxf. Ausg. in *Allgem. Litz. N. 172. flg.*
Auch mögen wohl die Worte „Rchtk RLD = KL^q und" S. 77. Z. 4. ein unächtes Einschiebsel im Texte seyn.

nicht vorfinden, enthalten *); seys nun, dass diese Worte wirklich auf verloren gegangene Stellen von Archimed schliessen lassen, oder, welches wahrscheinlicher ist, als Beziehungen auf Anmerkungen eines andern, etwa die des Eutocius, anfänglich an den Rand gesezt, von diesem in den Text übergegangen seyen **). Noch finden sich in

*) Oxf. A. p. 81. l. 25, 26. „ως εδειχθη εν τω λημματι";
p. 14. l. ult. „Τουτο γαρ φανερον δια λημματων",
p. 121. l. 34. „Ταυτα γαρ δεδεικται εν τοις λημμασι";
p. 151. l. 4, 5. „Τουτο γαρ εν τοις λημμασι τα πρωτα βιβλια προδεδεικται";
(Bey lezterer Stelle ist zugleich in der Uebersezung etwas abgekürzt: eben so bey p. 153. l. 1. sqq.)
p. 178. l. 6, 7. „Τουτο γαρ δειχθησεται";
p. 186. l. 23, 24. „Τουτο εστι τελει",
Bey jeder dieser Stellen gibt Eutocius Erläuterungen; er citirt aber bey keiner dieser Erläuterungen die angeführten griechischen Worte.

**) Etwa wie die Citation der Elemente, die sich beym IIten Saz des I B. ü. K. u. Cyl. in der Basler Ausgabe (dem IIIten in der Oxf.) findet, und in der Oxforter weggelassen ist.

1798
Archimedes
ED.

Fürs erste nun die Erklärungen und angenommenen Säze, welche zu den Beweisen dienen.

Erklärungen.

1. Es gibt begrenzte gebogene Linien in einer Ebene, die entweder ganz auf einerley Seite der ihre Endpunkte verbindenden geraden Linien liegen, oder doch keinen ihrer Theile auf der andern Seite derselben haben.

2. Gegen einerley Seite hohl nun nenne ich eine Linie, die so beschaffen ist, dass, man mag auf ihr zwey Punkte nehmen, welche man will, die zwischen denselben liegenden geraden Linien entweder alle auf einerley Seite der Linie, oder zum Theil auf einerley Seite von ihr, zum Theil auf sie selbst fallen, keine aber auf die andere Seite derselben.

3. Ebenfalls gibt es begrenzte Oberflächen, welche zwar nicht in einer Ebene liegen, ihre Grenzen aber in einer Ebene haben, die entweder ganz auf einerley Seite von der Ebene liegen, in welcher ihre Grenzen sind, oder doch keinen Theil auf der andern Seite derselben haben.

4. Gegen einerley Seite hohl nun nenne ich Oberflächen, die so beschaffen sind, dass, wenn man auf ihnen zwey Punkte nimmt, die zwischen ihnen liegenden geraden Linien entweder alle auf einerley Seite der Oberflächen fallen, oder einige von ihnen auf einerley Seite der Oberflächen fallen, andere aber auf diese selbst, aber keine auf die andere Seite derselben.

5. Einen körperlichen Ausschnitt nenne ich eine Figur, die, wenn eine Kugel von einem Kegel geschnitten wird, der seine Spize im Mittel-

punkt der Kugel hat, von der Oberfläche des Kegels und der innerhalb desselben befindlicheu Kugeloberfläche eingeschlossen ist.

6. Einen körperlichen Rhombus nenne ich eine Figur, die aus zwey Kegeln besteht, welche auf einerley Grundfläche stehen, deren Spizen aber auf verschiedenen Seiten der Ebene der Grunfläche und deren Axen in einer geraden Linie liegen.

Ich nehme ferner folgendes an:

Angenommene Säze.

1. Dass unter solchen Linien, welche einerley Endpunkte haben, die gerade die kleinste sey;

2. Von den andern Linien aber, welche in einer Ebene liegen und einerley Endpunkte haben, zwey, die gegen einerley Seite hohl sind, ungleich seyen, wenn entweder die eine ganz von der andern und der einerley Endpunkte mit ihr habenden geraden Linie eingeschlossen, oder ein Theil derselben eingeschlossen, ein anderer gemeinschaftlich ist; und zwar die eingeschlossene kleiner sey.

3. Dass ferner unter solchen Flächen, welche einerley Grenzen haben, wenn diese in einer Ebene liegen, die ebene Fläche die kleinste sey;

4. Von den andern Flächen aber, welche einerley Grenzen haben, wofern diese Grenzen in einer Ebene liegen, zwey, die gegen einerley Seite hohl sind, ungleich seyen, wenn entweder die eine ganz von der andern und der einerley Grenzen mit ihr habenden ebenen Fläche eingeschlossen, oder ein Theil derselben eingeschlossen, ein anderer gemeinschaftlich ist; und zwar die eingeschlossene kleiner sey.

5. Ferner dass bey ungleichen Linien, ungleichen Flächen und ungleichen Körpern der Ueberschuss der grössern Grösse über die kleinere wiederholtemale zu sich selbst hinzugesezt grösser werden könne als jede vorgelegte gleichartige Grösse.'

Dis nun vorausgesezt;

Saz I.

Wenn in einen Kreis ein Vielek beschrieben wird, so ist offenbar, dass der Umfang des darein beschriebenen Vieleks kleiner sey als der Umfang des Kreises.

Denn jede Seite des Vieleks ist kleiner als der von ihr abgeschnittene Kreisbogen (Angen. Saz I.).

Saz II. Fig. 1.

Wenn um einen Kreis ein Vielek beschrieben wird, so ist der Umfang des darum beschriebenen Vieleks grösser als der Umfang des Kreises.

Es sey *ACEGK* ein um den Kreis *M* beschriebenes Vielek. Ich behaupte, dass der Umfang des Vieleks grösser sey als der Umfang des Kreises.

Denn da die *BA*, *AL* zusammengenommen grösser ist als der Bogen *BL*, weil sie den Bogen einschliesst, der die nämlichen Endpunkte mit ihr hat (Angen. S. 2.); und ebenso die *DC*, *CB* zusammengenommen grösser als *DB*, die *LK*, *KH* zusammengenommen grösser als *LH*, ferner die *FG*, *GH* zusammengenommen grösser als *FH*, und die *DE*, *EF* zusammengenommen grösser als *DF*; so ist mithin der ganze Umfang des Vieleks grösser als der Umfang des Kreises.

Saz III. Fig. 2.

Wenn zwo ungleiche Grössen gegeben sind, so kann man zwo ungleiche gerade Linien von

der Beschaffenheit finden, dass die grössere von ihnen zur kleineren ein kleineres Verhältniss habe als die grössere Grösse zur kleinern.

Es seyen zwo ungleiche Grössen AB, D, und AB die grössere. Ich behaupte, dass man zwo ungleiche gerade Linien finden könne, welche der erwähnten Forderung Genüge leisten.

Es sey $BC = D$, und irgend eine gerade Linie EG. So wird die CA wiederholtemale zu sich selbst hinzugesezt die D übertreffen (Angen. S. 5.). Man nehme nun AH ein solches vielfaches von AC, und wie vielfach AH von AC ist, eben so vielfach sey FG von GE. So ist $HA : AC = FG : GE$, und *umgekehrt* $EG : GF = AC : AH$. Und da AH grösser ist als D, das ist, als CB, so ist $CA : AH < CA : CB$, und *verbunden* $EF : FG < AB : BC$ oder $< AB : D$, weil $BC = D$. Es sind demnach zwo ungleiche gerade Linien gefunden, welche der erwähnten Forderung Genüge leisten, dass nämlich die grössere derselben zur kleinern ein kleineres Verhältniss habe als die grössere Grösse zur kleinern.

Saz IV. Fig. 3.

Wenn zwo ungleiche Grössen und ein Kreis gegeben sind, so läst sich ein Vielek in den Kreis und ein anderes darum beschreiben, so dass die Seite des darum beschriebenen Vieleks zur Seite des darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe als die grössere Grösse zur kleinern.

Es seyen die beyden gegebenen Grössen A, B, und $CDEF$ der gegebene Kreis. Ich behaupte, dass das verlangte sich bewerkstelligen lasse.

Man finde zwo gerade Linien H, KL, wovon H die grössere sey, so dass H zu KL ein kleineres Verhältnis habe als die grössere Grösse zur kleineren (Saz III.); errichte in L die LM senkrecht auf KL, und ziehe aus K die $KM = H$, welches sich thun läst (weil $H > KL$). Man ziehe im Kreise zwey auf einander senkrechte Durchmesser CE, DF. Wird nun der Winkel DGC halbirt, dessen Helfte wieder halbirt, und die Halbirungen so fort-

gesezt; so erhält man zum Rest einen Winkel, der kleiner ist, als das doppelte des Winkels LKM (E. X, 1.). Es sey NGC dieser Rest, und man ziehe NC; so ist NC die Seite eines gleichseitigen Vieleks. Denn da der Winkel NGC den Winkel DGC misst, welcher ein rechter ist; so misst der Bogen NC den Bogen DC, welcher ein Quadrant ist, und daher auch die ganze Peripherie des Kreises. CN ist also eine Seite eines gleichseitigen Vieleks.

Man halbire den Winkel NGC durch die gerade Linie GO, und in O berühre POQ den Kreis; man verlängere GC nach P, GN nach Q: so ist PQ die Seite eines um den Kreis beschriebenen gleichseitigen Vieleks, das dem darein beschriebenen, dessen Seite CN, ähnlich ist.

Da nun der Winkel NGC kleiner als das doppelte von LKM, aber das doppelte von TGC ist, so ist der Winkel TGC kleiner als LKM. Nun sind die Winkel bey L, T rechte. Folglich $MK : KL > CG : GT$ *); und da $GC = GO$, $GO : GT$, das ist, $PQ : CN < MK : KL$; und es ist PQ die Seite eines um den Kreis, CN die Seite eines darein beschriebenen Vieleks. Welches zu finden aufgegeben war.

Satz V. Fig. 4.

Wiederum wenn zwo ungleiche Grössen und ein Kreisausschnitt gegeben sind, so lässt sich ein Vielek um den Ausschnitt und eines darein beschreiben, so dass die Seite des darum beschriebenen zu der Seite des darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe, als die grössere Grösse zur kleineren.

Es seyen wiederum zwo ungleiche Grössen E, F, wovon E die grössere sey, und ein Kreis ABC, dessen Mittelpunkt D, und bey D stehe der Kreisausschnitt ADB. Man soll ein Vielek um den Ausschnitt ADB und eines

*) Nämlich KR an der nämlichen Seite von LK mit KM so gezogen, dass der Winkel LKR = TGC, wird, da LKM > TGC, die LM zwischen L und M in R treffen; daher MK > RK, und MK : KL > RK : KL, das ist (E. VI, 4.), > CG : GT. Eutocius.

menhang *) eingeschalteten Worte sind von denen, die aus dem griechischen Text, so wie wir ihn jezt haben, übersezt sind, jedesmal durch ( ) unterschieden. Einigemal ist etwas weggelassen worden, das sich im griechischen Texte findet **): besonders Worte, die eine Berufung auf Lehnsäze oder Erläuterungen, welche sich im Text

---

*) Wie die Worte: „Da nun - - - dieser Kreis". Seite 60. Z. 31—43;
die Worte: „in der andern - - - fallen". S. 99. Z. 8—12.
Beyde Stellen sind auch bey *Rivaltus* und *Sturm* ergänzt. Bey der leztern ist die zu p. 198. lin. 1. in der Oxforter Ausgabe gesezte Vermuthung „Credi-derim glossema esse" ungegründet.

**) D[illegible]e 28. in der Anm. erwähnte Lehnsaz, der [illegible]s des XVIIten Sazes nichts nüzt;
„ως τετραπλ. γινεσθαι" p. 103. l. 15. der [illegible]elle die Recension der Oxf. Ausg. [illegible]N. 172. flg.
[illegible]e Worte „Rchtk RLD = KL[illegible] und" [illegible]ächtes Einschiebsel im Texte seyn.

nicht vorfinden, enthalten *); seys nun, dass diese Worte wirklich auf verloren gegangene Stellen von Archimed schliessen lassen, oder, welches wahrscheinlicher ist, als Beziehungen auf Anmerkungen eines andern, etwa die des Eutocius, anfänglich an den Rand gesezt, von diesem in den Text übergegangen seyen **). Noch finden sich in

*) Oxf. A. p. 81. l. 25, 26. „ως εδειχθη εν τω λημματι";
p. 14. l. ult. „Τουτο γαρ φανερον δια λημματων",
p. 121. l. 34. „Ταυτα γαρ δεδεικται εν τοις λημμασι";
p. 151. l. 4, 5. „Τουτο γαρ εν τοις λημμασι τα πρωτα βιβλια προδεδεικται";
(Bey lezterer Stelle ist zugleich in der Uebersezung etwas abgekürzt: eben so bey p. 153. l. 1. sqq.)
p. 178. l. 6, 7. „Τουτο γαρ δειχθησεται";
p. 186. l. 23, 24. „Τουτο εστι τελει",
Bey jeder dieser Stellen gibt Eutocius Erläuterungen; er citirt aber bey keiner dieser Erläuterungen die angeführten griechischen Worte.

**) Etwa wie die Citation der Elemente, die sich beym IIten Saz des I B. ü. K. u. Cyl. in der Basler Ausgabe (dem IIIten in der Oxf.) findet, und in der Oxforter weggelassen ist.

zu dem darum beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe, als die genannte grössere Grösse zur kleineren (Saz VI.). Dieses darum beschriebene Vielek wird dasjenige seyn, welches Reste übrig lässt, die kleiner als der gegebene Raum *B* sind.

Denn da das darum beschriebene Vielek zu dem darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis hat als beyde der Kreis und der Raum *B* zusammen zum Kreis, der Kreis aber grösser ist als das darein beschriebene; so hat um so viel mehr das darum beschriebene Vielek zum Kreis ein kleineres Verhältnis als beyde der Kreis und der Raum *B* zusammen zum Kreis. Folglich haben auch *getrennt* die Reste vom darum beschriebenen Vielek zum Kreis ein kleineres Verhältnis als der Raum *B* zum Kreise hat; mithin sind die Reste von dem darum beschriebenen Vielek kleiner als der Raum *B*.

Oder auch: Da das darum beschriebene Vielek zum Kreis ein kleineres Verhältnis hat als der Kreis und der Raum *B* zusammen zum Kreis; so ist jenes Vielek kleiner als die beyden leztern zusammen; folglich sind auch die Reste kleiner als der Raum *B*.

Eben so verhält es sich mit dem Kreisausschnitt.

Saz VIII. Fig. 7.

Wenn in einen gleichschenklichen Kegel eine Pyramide beschrieben wird, die eine gleichseitige Grundfläche hat, so ist ihre Oberfläche ohne die Grundfläche einem Dreyek gleich, dessen Grundlinie dem Umfang der Grundfläche gleich und dessen Höhe das von der Spize auf eine Seite der Grundfläche gefällte Loth ist.

Es sey ein gleichschenklicher Kegel, dessen Grundfläche der Kreis *ABC*, und in derselben sey eine Pyramide beschrieben, die zur Grundfläche das gleichseitige Dreyek *ABC* habe. Ich behaupte, dass ihre Oberfläche ohne die Grundfläche dem erwähnten Dreyek gleich sey.

Denn da der Kegel gleichschenklich und die Grundfläche der Pyramide gleichseitig ist, so sind die Höhen der Seitenflächen der Pyramide einander gleich. Diese Dreye-

ke haben nun zu Grundlinien die AB, BC, CA, und die erwähnte Höhe. Folglich sind diese Dreyeke, das ist, die Oberfläche der Pyramide ohne das Dreyek ABC, gleich einem Dreyek, dessen Grundlinie den AB, BC, CA zusammen, und dessen Höhe das genannte Loth ist.

Deutlicher so (*Fig. 8.*): Es sey ein gleichschenklicher Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABC und dessen Spize der Punkt D sey, und in dem Kegel eine Pyramide beschrieben, welche zur Grundfläche das gleichseitige Dreyek ABC habe. Man ziehe DA, DB, DC. Ich behaupte, dass die Dreyeke ADB, ADC, BDC einem Dreyek gleich seyen, dessen Grundlinie der Umfang des Dreyeks ABC, das Loth aber von seiner Spize auf die Grundlinie dem von D auf BC gefüllten Lothe gleich ist.

Denn man fälle die Lothe DK, DL, DM; so sind diese einander gleich. Und es sey das Dreyek EFG, dessen Grundlinie EF dem Umfang des Dreyeks ABC, das Loth GH aber dem DL gleich sey. Da nun das Rechtek $BC \times DK$ doppelt so gros ist, als das Dreyek DBC, auch das Rechtek $AB \times DL$ doppelt so gros als das Dreyek ADB, und das Rechtek $AC \times DM$ doppelt so gros als das Dreyek ADC; so ist das Rechtek aus dem Umfang des Dreyeks ABC, das ist EF, und DL, das ist GH, doppelt so gros als die Dreyeke ADB, BDC, ADC. Aber das Rechtek $EF \times GH$ ist auch doppelt so gros als das Dreyek EFG. Folglich ist das Dreyek EFG den Dreyeken ADB, BDC, ADC zusammen gleich.

Saz IX. Fig. 9.

Wenn um einen gleichschenklichen Kegel eine Pyramide beschrieben wird, so ist die Oberfläche derselben ohne ihre Grundfläche einem Dreyek gleich, das eine Grundlinie gleich dem Umfang der Grundfläche und zur Höhe die Seite des Kegels hat.

Es sey ein Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABC sey, und um denselben eine Pyramide beschrieben, so dass ihre Grundfläche, nämlich das Vielek DEF um den Kreis ABC beschrieben sey. Ich behaupte, dass die Oberfläche

seyn, als das Dreyek ADC *). Es sey nun H der Ueberschuss der genannten Dreyeke über das Dreyek ADC. So ist H entweder kleiner als die Abschnitte AB, BC, oder nicht.

Es sey fürs erste H nicht kleiner. Da nun zwo Flächen sind, nämlich die zwischen AD, DB befindliche Kegeloberfläche nebst dem Abschnitt AEB und die des Dreyeks ADB, welche die nämliche Grenze haben, nämlich den Umfang des Dreyeks ADB; so ist die einschliessende grösser als die eingeschlossene (Angen. Saz 4.); also die zwischen AD, DB befindliche Kegeloberfläche nebst dem Abschnitt AEB grösser als das Dreyek ABD. Eben so ist auch die zwischen BD, DC befindliche nebst dem Abschnitt BFC grösser als das Dreyek BDC. Folglich ist die ganze Kegeloberfläche (zwischen AD, DC) nebst dem Raum H grösser als die erwähnten Dreyeke. Diese Dreyeke aber sind gleich dem Dreyek ADC nebst dem Raum H. Man nehme den gemeinschaftlichen Raum H hinweg; so ist der Rest, die Kegeloberfläche zwischen AD, DC grösser als das Dreyek ADC.

Nun sey H kleiner als die Abschnitte AB, BC. Wenn man die Bögen AB, BC halbirt, ihre Hälften wieder halbirt, und so fort; so wird man Abschnitte übrig behalten, die kleiner sind, als der Raum H (SazVI Zus.). Es seyen die Abschnitte über AE, EB, BF, FC diese übrig behaltenen, und man ziehe DE, DF. So ist wiederum ebenfalls die Kegeloberfläche zwischen AD, DE nebst dem Abschnitt über AE grösser als das Dreyek ADE; die zwischen ED, DB nebst dem Abschnitt über EB grösser als das Dreyek EDB (Angen. Saz 4). Folglich die Oberfläche zwischen AD, DB nebst den Abschnitten über AE, EB grösser als die Dreyeke ADE, EDB; und da, wie gezeigt worden, die Dreyeke ADE, EDB

*) Eine von D an G die Mitte von AC gezogene gerade Linie steht auf AC senkrecht (E. XII, 10 Conv.), und halbirt den Winkel ADC; und es ist DB = DA > DG (E. I, 19), Winkel ADB = CDB > ADG (E. XI, 20), auch ADB + ADG < 2 R (E. XI, 21.). Hieraus läst sich zeigen, dass Δ ADB > Δ ADG Denn man denke sich dieselben in einer Ebene (Fig. 10 b.), und ziehe BG; so wird diese zwischen BD, BA fallen. Nun ist sowol Δ EDB : Δ EDG als Δ EAB : Δ EAG, daher auch (E. V, 12) Δ ADB : Δ ADG = BE : EG (E. VI, 1). Da aber BD > DG, so ist, wenn DF den Winkel BDG halbirt, BF > FG (E. VI, 3), und um so viel mehr BE > EG. Folglich auch Δ ADB > Δ ADG.
Eben so ist Δ CDB > Δ CDG. Folglich Δ ADB + Δ CDB > Δ ADC,

grösser sind, als das Dreyek *ADB*; so ist um so viel mehr die Kegeloberfläche zwischen *AD*, *DB* nebst den Abschnitten über *AE*, *EB* grösser als das Dreyek *ADB*. Aus dem nämlichen Grund ist auch die Kegeloberfläche zwischen *BD*, *DC* nebst den Abschnitten über *DF*, *FC* grösser als das Dreyek *BDC*. Folglich ist die ganze Oberfläche zwischen *AD*, *DC* nebst den genannten Abschnitten grösser als die Dreyeke *ABD*, *DBC*. Diese sind nun dem Dreyek *ADC* und dem Raum *H* gleich; und die genannten Abschnitte sind kleiner als der Raum *H*. Mithin ist die übrigbleibende Oberfläche zwischen *AD*, *DC* grösser als das Dreyek *ADC*.

Saz XI. Fig. 11.

Wenn an den Kreis, der die Grundfläche eines Kegels ist, Tangenten gezogen werden, die in der nämlichen Ebene mit dem Kreise liegen und zusammenstossen, von den Berührungspunkten aber und den Punkten, wo die Tangenten zusammenstossen, an die Spize des Kegels gerade Linien gezogen werden; so sind die von den Tangenten und den an die Spize des Kegels gezogenen geraden Linien eingeschlossenen Dreyeke grösser als die zwischen denselben befindliche Kegeloberfläche.

Es sey ein Kegel, dessen Grundfläche der Kreis *ABC* und dessen Spize *E* sey. Man ziehe an den Kreis die Tangenten *AD*, *DC* in der nämlichen Ebene mit ihm, und vom Punkt *E*, der Spize des Kegels, nach *A*, *D*, *C* die geraden Linien *EA*, *ED*, *EC*. Ich behaupte, dass die Dreyeke *ADE*, *DEC* grösser seyen als die Kegeloberfläche zwischen den geraden Linien *AE*, *EC* und dem Bogen *ABC*.

Man halbire den Bogen *ABC* in *B*, ziehe an den Kreis die Tangente *GBF*, welche mit *AC* parallel seyn wird (E. III, 27. 32. I, 27.), und von *G*, *F* nach *E* die geraden Linien *GE*, *FE*. Da die *GD*, *DF* grösser sind als *GF*, so sind, wenn man *GA*, *FC* hinzusezt, die *AD*, *DC* grösser als *AG*, *GF*, *FC*. Und da *AE*, *EB*, *EC* Seiten des gleichschenklichen Kegels sind, so sind sie gleich. Sie stehen aber auch senkrecht auf den Tangenten:

denn es ist offenbar, dass die von der Spize des geradstehenden Kegels an den Berührungspunkt der Grundfläche gezogene gerade Linie auf der Tangente senkrecht steht. (E. III, 18. XI, 10 Conv.). Und die von diesen senkrechten Linien und den Grundlinien der Dreyeke *AED*, *DCE* eingeschlossenen Rechteke zusammen sind grösser als die von den nämlichen senkrechten Linien und den Grundlinien der Dreyeke *AGE*, *GEF*, *FEC* eingeschlossenen; denn die *AG*, *GF*, *FC* zusammen sind kleiner als *CD*, *DA*, und ihre Höhen sind gleich. Daher sind auch die Dreyeke *AED*, *DCE* zusammen grösser als die Dreyeke *AEG*, *GFE*, *FEC* zusammen. Der Ueberschuss der Dreyeke *AED*, *DCE* über die Dreyeke *AEG*, *GFE*, *FEC* sey nun der Raum *H*. Dieser Raum ist entweder kleiner als die übrig bleibenden Abschnitte *AGB*, *BFC* oder nicht.

Er sey fürs erste nicht kleiner. Da nun hier zwo zusammengesezte Flächen sind, die eine die Oberfläche der Pyramide, welche das Trapezium *AGFC* zur Grundfläche und den Punkt *E* zur Spize hat, die andere die Kegeloberfläche zwischen *AE*, *EC* nebst den Abschnitten *AGB*, *BFC*, welche einerley Grenze haben, nämlich den Umfang des Dreyeks *AEC*; so ist die Oberfläche der Pyramide ohne das Dreyek *AEC* grösser als die Kegeloberfläche nebst dem Abschnitt *ABC* (Angen. Saz 4.). Man nehme den gemeinschaftlichen Abschnitt *ABC* hinweg. So sind die übrig bleibenden Dreyeke *AGE*, *GEF*, *FEC* nebst den Abschnitten *AGB*, *BFC* grösser als die Kegeloberfläche zwischen *AE*, *EC*. Nun ist aber der Raum *H* nicht kleiner als die Abschnitte *AGB*, *BFC*. Also sind um so viel mehr die Dreyeke *AGE*, *GEF*, *FEC* nebst dem Raume *H* grösser als die Kegeloberfläche zwischen *AE*, *EC*. Die Dreyeke *AGE*, *GEF*, *FEC* nebst dem Raum *H* aber sind die Dreyeke *AED*, *DEC*. Folglich sind die Dreyeke *AED*, *DEC* grösser als die erwähnte Kegeloberfläche.

Es sey nun der Raum *H* kleiner als die Abschnitte. So wird man durch fortgesezte Beschreibung von Vieleken um die Abschnitte, indem man nämlich die übrig gebliebenen Bögen gleichfalls halbirt und an dieselbe Tangenten zieht, Abschnitte übrig behalten, welche zusammen kleiner sind als der Raum *H* (Saz VII.). Dis sey geschehen, und es seyen *AMK*, *KNB*, *BOL*, *LPC* die Abschnitte, welche kleiner seyen als *H*. Man ziehe die übrigen Linien nach *E*. So sind

wieder offenbar die Dreyeke *AGE*, *GEF*, *FEC* grösser als die Dreyeke *AEM*, *MEN*, *NEO*, *OEP*, *PEC*; denn die Grundlinien der ersten sind grösser als die der leztern, ihre Höhen aber gleich. Ferner ist ebenfalls wieder die Oberfläche der Pyramide, welche zur Grundfläche das Vielek *AMNOPC* und ihre Spize in *E* hat, ohne das Dreyek *AEC* grösser als die Kegeloberfläche zwischen *AE*, *EC* nebst dem Abschnitt *ABC*. Man nehme den gemeinschaftlichen Abschnitt *ABC* hinweg. So sind die übrigbleibenden Dreyeke *AEM*, *MEN*, *NEO*, *OEP*, *PEC*, nebst den Abschnitten *AMK*, *KNB*, *BOL*, *LPC* grösser als die Kegeloberfläche zwischen *AE*, *EC*. Nun aber ist der Raum H grösser als die gedachten Abschnitte, und vermöge des bewiesenen sind auch die Dreyeke *AGE*, *GEF*, *FEC* grösser als die Dreyeke *AEM*, *MEN*, *NEO*, *OEP*, *PEC*. Also sind um so viel mehr die Dreyeke *AGE*, *GEF*, *FEC* nebst dem Raum *H*, das ist, die Dreyeke *ADE*, *DEC* grösser als die Kegeloberfläche zwischen den geraden Linien *AE*, *EC*.

Satz XII. Fig. 12.

Wenn auf der Oberfläche eines geradstehenden Cylinders zwo gerade Linien befindlich sind, so ist die zwischen diesen geraden Linien befindliche Cylinderoberfläche grösser als das Parallelogramm, welches von den in der Oberfläche des Cylinders befindlichen und den die Endpunkt derselben verbindenden geraden Linien eingeschlossen ist.

Es sey ein geradstehender Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis *AB* sey, welchem der Kreis *CD* gegenüber liegt; und es seyen die geraden Linien *AC*, *BD* gezogen. Ich behaupte, dass die von den geraden Linien *AC*, *BD* abgeschnittene Cylinderoberfläche grösser sey, als das Parallelogramm *ACDB*.

Man halbire die beyden Bögen *AB*, *CD* in den Punkten *E*, *F*, und ziehe *AE*, *EB*, *CF*, *FD*. Da die *AE*, *EB* zusammen grösser sind als *AB*, und die über ihnen stehenden Parallelogramme gleiche Höhen haben; so sind die Parallelogramme, die zu Grundlinien *AE*, *EB* und einerley Hö-

he mit dem Cylinder haben, grösser als das Parallelogramm *ABDC*. Sie seyen grösser um den Raum *G*. Dieser ist entweder kleiner als die ebenen Abschnitte *AE*, *EB*, *CF*, *FD* oder nicht.

Er sey fürs erste nicht kleiner. Da die von den geraden Linien *AC*, *BD* abgeschnittene Cylinderoberfläche zusammt den Abschnitten *AEB*, *CFD* zur Grenze hat die Ebene des Parallelogramms *ABDC*, aber auch die aus den Parallelogrammen, deren Grundlinien *AE*, *EB* sind, und deren Höhe mit der des Cylinders einerley ist, und den Dreyeken *AEB*, *CFD* bestehende Fläche die Ebene des Parallelogramms *ABDC* zur Grenze hat, und eine die andere einschliesst, und beyde gegen die nämliche Seite hohl sind; so ist die von den geraden Linien *AC*, *BD* abgeschnittene Cylinderoberfläche zusammt den ebenen Abschnitten *AEB*, *CFD* grösser als die aus den zu Grundlinien *AE*, *EB* und einerley Höhe mit den Cylinder habenden Parallelogrammen und den Dreyeken *AEB*, *CFD* zusammengesezte Fläche (Angen. Saz 4). Man nehme die gemeinschaftlichen Dreyeke *AEB*, *CFD* hinweg. So ist die übrig bleibende von den geraden Linien *AC*, *BD* abgeschnittene Cylinderoberfläche nebst den ebenen Abschnitten *AE*, *EB*, *CF*, *FD* grösser als die aus den Parallelogrammen, die zu Grundlinien *AE*, *EB* und einerley Höhe mit dem Cylinder haben, zusammengesezte Fläche. Diese Parallelogramme aber, die *AE*, *EB* zu Grundlinien und die Höhe des Cylinders haben, sind gleich den Parallelogrammen *ACDB* und dem Raum *G*. Folglich ist auch die übrigbleibende von den geraden Linien *AC*, *BD* abgeschnittene Cylinderoberfläche grösser als das Parallelogramm *ACDB*.

Nun sey der Raum *G* kleiner als die ebenen Abschnitte *AE*, *EB*, *CF*, *FD*. Man halbire jeden der Bögen *AE*, *EB*, *CF*, *FD* in den Punkten *H*, *K*, *L*, *M*, und ziehe *AH*, *HE*, *EK*, *KB*, *CL*, *LF*, *FM*, *MD*. So wird von den ebenen Abschnitten *AE*, *EB*, *CF*, *FD* nicht weniger als die Helfte, nämlich die Dreyeke *AHE*, *EKB*, *CLF*, *FMD* hinweggenommen. Wenn dis so fortgesezt wird, so wird man eine Summe von Abschnitten übrig behalten, die kleiner als der Raum *G* seyn wird (Zuf. zu S. VI.). Man wird sodenn ebenfalls beweisen können, dass die Parallelogramme, die zu Grundlinien *AH*, *HE*, *EK*, *KB* und einerley Höhe mit dem Cylinder haben, grösser sind

als die Parallelogramme, die *AE*, *EB* zu Grundlinien und einerley Höhe mit dem Cylinder haben. Und da so wohl die von den geraden Linien *AC*, *BD* abgeschnittene Cylinderoberfläche zusammt den Abschnitten *AEB*, *CFD*, als auch die aus den Parallelogrammen, welche *AH*, *HE*, *EK*, *KB* zu Grundlinien und einerley Höhe mit dem Cylinder haben, und aus den geradlinichen Figuren *AHEKB*, *CLFMD* zusammengesezte Fläche zur Grenze hat die Ebene des Parallelogramms *ACDB*; (so ist die erstere Fläche als die einschliessende grösser als die leztere). Man nehme die gemeinschaftlichen geradlinichen Figuren *AHEKB*, *CLFMD* hinweg, so bleibt die von den geraden Linien *AC*, *BD* abgeschnittene Cylinderoberfläche zusammt den ebenen Abschnitten *AH*, *HE*, *EK*, *KB*, *CL*, *LF*, *FM*, *MD* grösser als die aus den Parallelogrammen, welche *AH*, *HE*, *EK*, *KB* zu Grundlinien und einerley Höhe mit dem Cylinder haben, bestehende Fläche. Die Parallelogramme aber, welche *AH*, *HE*, *EK*, *KB*, zu Grundlinien und einerley Höhe mit dem Cylinder haben, sind grösser als die Parallelogramme, welche *AE*, *EB* zu Grundlinien und auch einerley Höhe mit dem Cylinder haben. Folglich ist auch die von den geraden Linien *AC*, *BD* abgeschnittene Cylinderoberfläche sammt den ebenen Abschnitten *AH*, *HE*, *EK*, *KB*, *CL*, *LF*, *FM*, *MD* grösser als die Parallelogramme, welche *AE*, *EB* zu Grundlinien und einerley Höhe mit dem Cylinder haben. Die Parallelogramme aber, welche *AE*, *EB* zu Grundlinien und einerley Höhe mit dem Cylinder haben, sind gleich dem Parallelogramm *ACDB* und dem Raum *G*. Folglich sind die von den geraden Linien *AC*, *BD* abgeschnittene Cylinderoberfläche und die ebenen Abschnitte *AH*, *HE*, *EK*, *KB*, *CL*, *LF*, *FM*, *MD* grösser als das Parallelogramm *ACDB* und der Raum *G*. Nun nehme man die Abschnitte *AH*, *HE*, *EK*, *KB*, *CL*, *LF*, *FM*, *MD* weg, welche kleiner sind als der Raum *G*. So ist mithin die übrigbleibende von den geraden Linien *AC*, *BD* abgeschnittene cylindrische Oberfläche grösser als das Parallelogramm *ACDB*.

Satz XIII. Fig. 13.

Wenn in der Oberfläche eines geradstehenden Cylinders zwo gerade Linien sich befinden,

und von deren Endpunkten an die Kreise, welche die Grundflächen des Cylinders sind, Tangenten gezogen werden, welche in den Ebenen dieser Kreise liegen und zusammen treffen; so sind die von den Tangenten und den Seiten des Cylinders eingeschlossenen Parallelogramme grösser als die zwischen den in der Oberfläche des Cylinders stehenden geraden Linien befindliche Cylinderoberfläche.

Es sey der Kreis *ABC* die Grundfläche eines geradstehenden Cylinders und in dessen Oberfläche zwey gerade Linien, deren Endpunkte *A*, *C* seyen; und in *A*, *C* seyen in der Ebene des Kreises Tangenten an denselben gezogen. So ist zu erweisen, dass die von den Tangenten und den Seiten des Cylinders eingeschlossenen Parallelogramme grösser sind als die auf *ABC* stehende Cylinderoberfläche.

Man ziehe die Tangente *EF*, und von den Punkten *E*, *F* gerade Linien parallel mit der Axe des Cylinders bis an die Ebene der andern Grundfläche. Die von *AG*, *GC* und den Seiten des Cylinders eingeschlossenen Parallelogramme sind nun grösser als die von *AE*, *EF*, *FC* und den Seiten Cylinders eingeschlossenen; denn da die *EG*, *GF* grösser sind als *EF*, so sind, wenn man die gemeinschaftlichen *AE*, *FC* hinzufügt, die ganzen *AG*, *GC* grösser als die *AE*, *EF*, *FC*. Die ersteren seyen grösser als die letztern um den Raum *K*. So ist die Helfte des Raums *K* entweder grösser als die von den geraden Linien *AE*, *EF* *FC* und den Bogen *AB*, *BC* eingeschlossenen Figuren oder nicht.

Sie sey fürs erste grösser. Nun hat die aus den Parallelogrammen, die auf *AE*, *EF*, *FC* stehen, dem Trapezium *AEFC* und dem ihm in der Ebene der andern Grundfläche gegenüberliegenden zusammengesezte Fläche zur Grenze den Umfang des Parallelogramms auf *AC*. Aber auch die aus der über dem Bogen *ABC* stehenden Cylinderoberfläche, dem Abschnitt *ABC* und dem ihm gegenüberliegenden zusammengesezte Fläche hat den nämlichen Umfang zur Grenze. Die gedachten Flächen haben demnach die nämliche Grenze, welche sich in einer Ebene befindet, eine von ihnen umschliesst die andere zum Theil, und ei-

nen Theil haben sie gemeinschaftlich. Die eingeschlossene ist nun kleiner (Angen. Saz 4.). Wenn man also das, was sie gemeinschaftlich haben, den Abschnitt *ABC* und den ihm gegenüberliegenden wegnimmt; so ist die Cylinderoberfläche auf dem Bogen *ABC* kleiner als die aus den Parallelogrammen, die auf *AE*, *EF*, *FC* stehen, den Figuren *AEB*, *BFC* und den ihnen gegenüberliegenden zusammengesezte Fläche. Die Flächen der genannten Parallelogramme aber nebst den genannten Figuren sind kleiner als die aus den Parallelogrammen auf *AG*, *GC* zusammengesezte Fläche; denn die erstern Parallelogramme waren nur mit dem Raum *K*, welcher grösser als die Figuren ist, den leztern gleich. Folglich sind die von *AG*, *GC* und den Seiten des Cylinders eingeschlossenen Parallelogramme grösser als die Cylinderoberfläche auf dem Bogen *ABC*.

Ist aber die Helfte von *K* nicht grösser als die genannten Figuren; so ziehe man Tangenten an den Kreis, so dass die übrigbleibenden Figuren kleiner als die Helfte von *K* werden (Saz VII.); so wird das übrige ebenso wie im vorigen bewiesen werden.

Nachdem nun diese Säze erwiesen sind, so ist ausser dem schon gesagten klar, dass, wenn in einen gleichschenklichen Kegel eine Pyramide beschrieben wird, die Oberfläche der Pyramide ohne ihre Grundfläche kleiner sey als die Kegeloberfläche.

Denn jedes der die Pyramide einschliessenden Dreyeke ist kleiner als die zwischen den Seiten des Dreyeks befindliche Kegeloberfläche (Saz X.); daher auch die ganze Oberfläche der Pyramide ohne ihre Grundfläche kleiner als die ganze Oberfläche des Kegels ohne seine Grundfläche.

Und dass, wenn um einen gleichschenklichen Kegel eine Pyramide beschrieben wird, die Oberfläche der Pyramide ohne ihre Grundfläche grösser sey als die Oberfläche des Kegels ohne seine Grundfläche (*Saz XI.*)

Ferner ist aus dem bisherigen klar: dass, wenn in einen geradstehenden Cylinder ein geradstehen-

des Prisma beschrieben wird, die aus den Parallelogrammen zusammengesezte Oberfläche des Prisma kleiner sey als die Oberfläche des Cylinders ohne seine Grundfläche. Denn jedes Parallelogramm des Prisma ist kleiner als die darauf stehende Cylinderoberfläche (Saz XII.)

Und dass, wenn um einen geradstehenden Cylinder ein Prisma beschrieben wird, die aus Parallelogrammen bestehende Oberfläche des Prisma grösser sey als die Oberfläche des Cylinders ohne seine Grundfläche (*Saz XIII.*).

Saz XIV. Fig. 14.

Jedes geradstehenden Cylinders Oberfläche ohne seine Grundfläche ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Seite des Cylinders und dem Durchmesser seiner Grundfläche ist.

Es sey der Kreis *A* die Grundfläche eines geradstehenden Cylinders, und dem Durchmesser des Kreises *A* sey *CD*, der Seite des Cylinders aber *EF* gleich. Zwischen *DC*, *EF* sey *G* die mittlere Proportionallinie, und *B* der Kreis, dessen Halbmesser gleich ist *G*. So ist zu beweisen, dass der Kreis *B* der Oberfläche des Cylinders ohne dessen Grundfläche gleich sey.

Wenn er ihr nicht gleich ist, so ist er grösser oder kleiner als dieselbe. Er sey fürs erste kleiner, wenns möglich ist. Da nun hier zwo ungleiche Grössen sind, die Oberfläche des Cylinders und der Kreis *B*; so lässt sich ein gleichseitiges Vielek um den Kreis *B* und ein anderes darein beschreiben; so dass das darum beschriebene zum darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als die Oberfläche des Cylinders zum Kreis *C* hat (Saz VI.). Man gedenke sich diese darum und darein beschrieben, und beschreibe um den Kreis *A* eine geradliniche Figur ähnlich der um *B* beschriebenen, und über ihr ein Prisma, welches um den Cylinder beschrieben seyn wird. Dem Umfang der geradlinichen Figur um den Kreis *A* sey die

KD, der KD die LF gleich, und CT die Helfte von CD. So ist das Dreyek KDT der um den Kreis A beschriebenen geradlinichen Figur gleich, da seine Grundlinie ihrem Umfang, seine Höhe dem Halbmesser des Kreises A gleich ist; das Parallelogramm EL aber gleich der Oberfläche des um den Cylinder beschriebenen Prisma, da es von der Seite des Cylinders und einer dem Umfang der Grundfläche des Prisma gleichen geraden Linie eingeschlossen ist. Es sey $ER = EF$; so ist das Dreyek FRL dem Parallelogramm EL, mithin auch der Oberfläche des Prisma gleich.

Da nun die um die Kreise A, B beschriebenen geradlinichen Figuren einander ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser (E. XII. 1 Cor.) Also $\triangle KTD$: geradl. Figur um den Kreis $B = TD_q : G^q$; denn TD, G sind den Halbmessern gleich. Aber $TD^q : G^q = TD : RF$;

denn G ist die mittlere Proportionallinie zwischen CD, EF, daher auch zwischen TD, RF. Weil nämlich DT = TC, RE = EF, so ist CD = 2 TD, RF = 2 FE, und CD : TD = RF : FE, TD × RF = CD × FE = Gq; mithin TD : G = G : RF, und TD : RF = $TD^q : G^q$, weil, wenn drey gerade Linien proportionirt sind, wie die erste zur dritten; so eine geradliniche Figur auf der ersten zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden auf der zweyten sich verhält (E. VI, 20 Cor. 2).

Und $TD : RF = \triangle KTD : \triangle RLF$, da KD = LF.

Folglich $\triangle KTD$: geradl. Figur um den Kreis $B = \triangle KTD : \triangle RLF$; mithin ist das Dreyek RLF der geradlinichen Figur um den Kreis B gleich. Folglich ist auch die Oberfläche des um den Cylinder A beschriebenen Prisma der um den Kreis B beschriebenen geradlinichen Figur gleich.

Da nun die um den Kreis B beschriebene geradlinichte Figur zu der darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis hat als die Oberfläche des Cylinders A zum Kreis B; so hat auch die Oberfläche des um den Cylinder A beschriebenen Prisma zu der in den Kreis B beschriebenen geradlinichen Figur ein kleineres Verhältnis als die Oberfläche des Cylinders A zum Kreis B und *verwechselt*: welches nicht möglich ist. Denn die Oberfläche des um den Cylinder beschriebenen Prisma ist vermöge des erwiesenen (Satz XV. Zus.) grösser als die Oberfläche des Cylin-

ders, die in den Kreis *B* beschriebene geradliniche Figur aber ist kleiner als der Kreis *B*. Der Kreis *B* ist also nicht kleiner als die Oberfläche des Cylinders.

Er sey nun grösser, wenns möglich ist. Man gedenke sich wieder eine geradliniche Figur in den Kreis *B* und eine andere darum beschrieben, so dass die darum beschriebene zu der darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe als der Kreis *B* zur Oberfläche des Cylinders (Saz VI.) Man beschreibe in den Kreis *A* ein dem in den Kreis *B* beschriebenen ähnliches Vielek, und über demselben ein Prisma. Nun sey wieder *KD* dem Umfang des in den Kreis *A* beschriebenen Vieleks und ihr *FL* gleich. So wird das Dreyek *KTD* grösser seyn als das in den Kreis *A* beschriebene Vielek, weil seine Grundlinie der Umfang des leztern und seine Höhe grösser ist als das vom Mittelpunkt auf eine Seite des Vieleks gefällte Loth; das Parallelogramm *EL* aber ist der aus Parallelogrammen bestehenden Oberfläche des Prisma gleich, weil es von der Seite des Cylinders und einer geraden Linie, die gleich ist dem Umfang des Vieleks, welches des Prisma Grundfläche ist, eingeschlossen wird. Folglich ist auch das Dreyek *RLF* gleich der Oberfläche des Prisma. Und da die in die Kreise *A*, *B* beschriebene Vieleke einander ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate der Halbmesser derselben. Aber auch die Dreyeke *KTD*, *FRL* verhalten sich wie die Quadrate jener Halbmesser. Folglich hat das in den Kreis *A* beschriebene Vielek zu dem in den Kreis *B* beschriebenen das nämliche Verhältnis wie das Dreyek *KTD* zum Dreyek *LFR*. Das in den Kreis *A* beschriebene Vielek aber ist kleiner als das Dreyek *KTD*. Folglich ist auch das in dem Kreis *B* beschriebene Vielek kleiner als das Dreyek *FRL*, mithin auch kleiner als die Oberfläche des in den Cylinder beschriebenen Prisma; welches unmöglich ist. Denn da das um den Kreis *B* beschriebene Vielek zu dem darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis hat als der Kreis *B* zur Oberfläche des Cylinders, und *verwechselt*; das um den Kreis *B* beschriebene Vielek aber grösser ist, als der Kreis *B*; so ist auch das in den Kreis *B* beschriebene Vielek grösser als die Oberfläche des Cylinders, folglich (Saz XIII. Zus.) auch grösser als die Oberfläche des Prisma. Der Kreis *B* ist also nicht grösser als die

Oberfläche des Cylinders. Nun ist aber bewiesen, dass er auch nicht kleiner sey. Er ist ihr also gleich *).

Saz XV. Fig. 15.

Jedes gleichschenklichen Kegels Oberfläche ohne seine Grundfläche ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie ist zwischen der Seite des Kegels und dem Halbmesser des Kreises, welcher des Kegels Grundfläche ist.

Es sey ein gleichschenklicher Kegel, dessen Grundfläche der Kreis *A* sey, und dessen Halbmesser *C*. Der Seite des Kegels sey *D* gleich, und *E* die mittlere Proportionallinie zwischen *C* und *D*. Ferner sey *B* ein Kreis, dessen Halbmesser gleich sey *E*. Ich behaupte, dass der Kreis *B* der Oberfläche des Kegels ohne dessen Grundfläche gleich sey.

Denn wäre er ihr nicht gleich, so ist er entweder grösser oder kleiner. Er sey fürs erste kleiner. So sind zwo ungleiche Grössen, die Oberfläche des Kegels und

---

*) *Folgerungen.*

1. Auf gleichen Grundflächen stehende cylindrische Oberflächen verhalten sich wie ihre Seiten oder Höhen.
2. Gleich hohe cylindrische Oberflächen verhalten sich wie die Durchmesser der Grundflächen.
3. Cylindrische Oberflächen sind im zusammengesezten Verhältniss ihrer Seiten und Durchmesser.
4. Aehnliche cylindrische Oberflächen sind im duplicirten Verhältnis ihrer Seiten oder Durchmesser.
5. Bey gleichen cylindrischen Oberflächen verhalten sich die Seiten umgekehrt wie die Durchmesser; und wenn die Seiten sich umgekehrt verhalten wie die Durchmesser, so sind die Oberflächen gleich.

Denn da die Cylindrischen Oberflächen sich verhalten wie die Kreise, denen sie gleich sind, und die Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser, diese Quadrate aber den Rechteken aus den Seiten und Durchmessern der Cylinder gleich sind, und die Rechteke die erwähnten Eigenschaften haben (E. VI, 1. 23. 20. 21.), so erhellen die abgeführten Folgerungen.

der Kreis *B*, von welchen die Oberfläche des Kegels die grössere ist, und es lässt sich ein gleichseitiges Vielek um den Kreis *B* und ein ähnliches darein beschrieben, so dass das darum beschriebene zu dem darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe als die Oberfläche des Kegels zum Kreis *B*. Man gedenke sich ein dem um den Kreis *B* beschriebenen ähnliches Vielek um den Kreis *A* beschrieben, und errichte auf demselben eine Pyramide, welche einerley Spize mit dem Kegel habe. Da nun die um die Kreise *A*, *B* beschriebenen Vieleke einander ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser, das ist, wie das Quadrat von *C* zum Quadrat von *E*, das ist, wie *C* zu *D*. Aber wie *C* zu *D*, so verhält sich das um den Kreis *A* beschriebene Vielek zur Oberfläche der um den Kegel beschriebenen Pyramide; denn *C* ist dem Loth vom Mittelpunkt auf eine Seite des Vieleks, *D* aber der Seite des Kegels gleich, (und *C*, *D* sind die Grundlinien) der Umfang des Vieleks aber ist die gemeinschaftliche Höhe der Parallelogramme, welche das doppelte jener Flächen sind (Bew. des S. IX). Folglich hat die um den Kreis *A* beschriebene geradliniche Figur einerley Verhältnis zu der um den Kreis *B* beschriebenen und zur Oberfläche der um den Kegel beschriebenen Pyramide. Die Oberfläche der Pyramide ist daher der um den Kreis *B* beschriebenen geradlinichen Figur gleich. Da nun die um den Kreis *B* beschriebene geradliniche Figur zu der darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis hat als die Oberfläche des Kegels zum Kreis *B*, so hat die Oberfläche der um den Kegel beschriebenen Pyramide zu der in den Kreis *B* beschriebenen geradlinichen Figur ein kleineres Verhältnis als die Oberfläche des Kegels zum Kreis *B*; welches unmöglich ist. Denn die Oberfläche der Pyramide ist, wie bewiesen worden (Saz XIII. Zus.), grösser als die Oberfläche des Kegels, und die in den Kreis *B* beschriebene geradliniche Figur ist kleiner als der Kreis *B*. Der Kreis *B* ist also nicht kleiner als die Oberfläche des Kegels.

Ich behaupte, dass er auch nicht grösser sey. Denn er sey grösser, wenns möglich ist. Man gedenke sich wieder ein Vielek in den Kreis *B* und ein anderes darum beschrieben, so dass das darum beschriebene zu dem darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe, als der Kreis *B* zur Oberfläche des Kegels; in den Kreis *A* gedenke man sich ein dem in den Kreis *B* beschrie-

benen ähnliches Vielek beschrieben, und beschreibe auf demselben eine Pyramide, welche einerley Spize mit dem Kegel habe. Da nun die in die Kreise *A*, *B* beschriebenen Vieleke einander ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate der Halbmesser derselben; das eine Vielek verhält sich demnach zum andern wie *C* zu *D*. *C* aber hat zu *D* ein grösseres Verhältnis als das in den Kreis *A* beschriebene Vielek zur Oberfläche der in den Kegel beschriebenen Pyramide (Saz IX); denn der Halbmesser des Kreises *A* hat zur Seite des Kegels ein grösseres Verhältniss als das Loth vom Mittelpunkt auf eine Seite des Vieleks zum Loth von der Spize des Kegels auf die Seite des Vieleks *). Daher hat auch das in den Kreis *A* beschriebene Vielek zu dem in den Kreis *B* beschriebenen ein grösseres Verhältniss als zur Oberfläche der Pyramide. Die Oberfläche der Pyramide ist also grösser als das in den Kreis *B* beschriebene Vielek. Es hat aber das um den Kreis *B* beschriebene Vielek zu dem darein beschriebenen ein kleineres Verhältniss als der Kreis *B* zur Oberfläche des Kegels. Folglich hat um so viel mehr das um den Kreis *B* beschriebene Vielek zur Oberfläche der in den Kegel beschriebenen Pyramide ein kleineres Verhältniss als der Kreis *B* zur Oberfläche des Kegels; welches unmöglich ist; denn das um den Kreis *B* beschriebene Vielek ist grösser als der Kreis *B*, die Oberfläche der Pyramide im Kegel aber ist kleiner als die Oberfläche des Kegels (Saz XIII. Zus.). Folglich ist der Kreis *B* auch nicht grösser als die Oberfläche des Kegels. Nun ist bewiesen worden, dass er nicht kleiner sey. Er ist ihr also gleich **).

---

*) Es sey (Fig. 51) der Kreis MKFH die Grundfläche eines Kegels, dessen Spize L, und in denselben ein gleichseitiges Vielek FKH beschrieben. AG sey das Loth vom Mittelpunkt auf KH, so ist LG das Loth von der Spize (E. XI, 11. Conv.). Nun wird AM : ML > AG : GL seyn.

Denn man ziehe der ML die GN parallel; so ist AM : ML = AG : GN, und GN < GL, daher AM : ML > AG : GL. Eutocius.

**) *Folgerungen.*

1. Kegeloberflächen auf gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Seiten (E. XII, 2. VI, 1.).

2. Kegeloberflächen, welche gleiche Seiten haben, verhalten sich wie die Durchmesser ihrer Grundflächen (E. VI, 1).

Saz XVI. Fig. 15.

Iedes gleichschenklichen Kegels Oberfläche verhält sich zu seiner Grundfläche wie die Seite des Kegels zum Halbmesser der Grundfläche des Kegels.

Es sey ein gleichschenklicher Kegel, dessen Grundfläche der Kreis *A* sey. Dem Halbmesser dieses Kreises sey die *C*, der Seite des Kegels die *D* gleich. So ist zu beweisen, dass die Oberfläche des Kegels zum Kreis *A* sich verhalte wie die *D* zu der *C*.

Denn man nehme zwischen *C*, *D* die mittlere Proportionallinie *E*, und seze einen Kreis *B*, dessen Halbmesser der *E* gleich sey. So ist der Kreis *B* der Oberfläche des Kegels gleich, wie im vorhergehenden Saz gezeigt worden ist. Auch lässt sich zeigen, dass der Kreis *B* zum Kreis *A* sich verhalte wie die *D* zu der *C*: denn jedes dieser Verhältnisse ist einerley mit dem des Quadrats von *E* zum Quadrat von *C* (E. VI, 20. XII, 2.), weil Kreise sich zu einander verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser, und ebenfalls wie die Quadrate ihrer Halbmesser, (E. VI, 22) indem die Durchmesser sich verhalten wie ihre Helften, das ist, wie die Halbmesser; den Halbmessern aber sind die *E*, *C* gleich. Mithin verhält sich auch die Oberfläche des Kegels zum Kreis *A* wie die *D* zu der *C*.

Saz XVII. Fig. 16.

Wenn ein gleichschenklicher Kegel durch eine seiner Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so ist die zwischen den zwo parallelen Ebenen enthaltene Kegeloberfläche einem Kreise

---

3. Kegeloberflächen sind im zusammengesezten Verhältniss ihrer Seiten und der Durchmesser ihrer Grundflächen (E. VI, 23.).
4. Aehnliche Kegeloberflächen sind im duplicirten Verhältniss ihrer Seiten oder Durchmesser (E. VI, 20).
5. Wenn Kegeloberflächen gleich sind, so sind ihre Seiten und Durchmesser umgekehrt proportionirt; und wenn diese umgekehrt proportionirt sind, so sind jene gleich (E. VI, 14.).

gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie ist zwischen der Seite des Kegels, die zwischen den parallelen Ebenen ist, und der geraden Linie, welche den Halbmessern der in den parallelen Ebenen liegenden Kreise zusammengenommen gleich ist.

Es sey ein Kegel, dessen durch die Axe gehendes Dreyek dem ABC gleich sey, um der von einer seiner Grundfläche parallelen Ebene geschnitten werde, wodurch der Schnitt DE entstehe. Die Axe sey BG. Ferner seze man einen Kreis, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie sey zwischen AD und $DF+AG$, und es sey H dieser Kreis. Ich behaupte, dass der Kreis H der zwischen DE, AC befindlichen Kegeloberfläche gleich sey.

Denn man seze die Kreise L, K, so dass das Quadrat vom Halbmesser des Kreises K dem Rechtek BDF, das Quadrat vom Halbmesser des Kreises L dem Rechtek BAG gleich sey; so ist der Kreis L der Oberfläche des Kegels ABC, der Kreis K der Oberfläche des Kegels DBE gleich (Saz XV. E. VI, 17). Und da das Rechtek $BAG = BDF + AD \times (DF+AG)$, weil DF mit AG parallel ist *), das Rechtek BAG aber = dem Halbmesser des Kreises L, Rechtek BDF = dem Quadrat vom Halbmesser des Kreises K, Rechtek $DA \times (DF+AG)$ = dem Quadrat vom Halbmesser des Kreises H; so ist das Quadrat vom Halbmesser des Kreises L gleich den Quadraten der Halbmesser der Kreise K, H; folglich auch der Kreis L gleich den Kreisen K, H (E. XII, 2 Cor. V, 24.). Aber der Kreis L ist der Oberfläche des Kegels BAC, der Kreis K aber der Oberfläche des Kegels DBE gleich. Folglich ist die übrigbleibende zwischen den parallelen Ebenen DE, AC enthaltene Kegeloberfläche dem Kreise H gleich.

Lehnsäze.

1. Kegel von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre

*) Denn $BA:AG = BD:DF$, daher $BD \times AG = BA \times DF = BDF + ADF$, und $BD \times AG + DAG$, das ist $BAG = BDF + ADF + DAG = BDF + AD \times (DF+AG)$ (E. II, 1). Eutocius. Der in den Ausgaben dem XVII. Saz vorangeschikte Lehnsaz ist wohl unächt.

Grundflächen, und Kegel von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen (E. XII, 11. 14.).

2. Wenn ein Cylinder von einer seiner Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so verhält sich ein Cylinder zum andern wie eine Axe zur andern (E. XII, 13.).

3.) Kegel, welche einerley Grundflächen mit Cylindern haben, verhalten sich wie die Cylinder (E. XII, 10. V, 15.).

4. Grundflächen und Höhen gleicher Kegel sind umgekehrt proportionirt; und diejenige, deren Grundflächen und Höhen umgekehrt proportionirt sind, sind gleich (E. XII, 15.).

5. Und Kegel, deren Durchmesser der Grundflächen sich verhalten wie ihre Axen, das ist, wie ihre Höhen, haben zu einander das triplicirte Verhältniss der Durchmesser ihrer Grundflächen (E. XII, 12.).

Alle diese Säze sind von den Geometern vor mir bewiesen worden.

Saz XVIII. Fig. 17.

Wenn von zwey gleichschenklichen Kegeln des einen Oberfläche der Grundfläche des andern, und das vom Mittelpunkt der Grundfläche des ersten auf die Seite des Kegels gefällte Loth der Höhe des andern gleich ist; so werden die Kegel gleich seyn.

Es seyen *ABC*, *DEF* zwey gleichschenkliche Kegel, und die Grundfläche des Kegels *ABC* sey gleich der Oberfläche des Kegels *DEF*, die Höhe des ersten *AG* aber gleich dem vom Mittelpunkt *H* der Grundfläche des andern auf eine Seite *DE* desselben gefällten Loth *KH*; so behaupte ich, dass die Kegel gleich seyen.

Denn da die Grundfläche des Kegels *ABC* gleich ist der Oberfläche des Kegels *DEF*, gleiche Grössen aber zur nämlichen einerley Verhältniss haben; so verhält sich die Grundfläche des *BAC* zur Grundfläche des *DEF* wie die Oberfläche des *DEF* zur Grundfläche des *DEF*: diese Oberfläche aber verhält sich zu dieser Grundfläche wie *DE*

zu EH; denn es ist bewiesen worden (Saz XVI), dass jedes Kegels Oberfläche zu seiner Grundfläche sich verhält wie die Seite desselben zum Halbmesser seiner Grundfläche, das ist, wie DE zu EH. Aber $DE : EH = DH : HK$; denn die Dreyeke sind gleichwinklich: auch ist $HK = AG$. Demnach verhält sich die Grundfläche des Kegels BAC zur Grundfläche des DEF wie die Höhe des DEF zur Höhe des ABC; mithin verhalten sich die Grundflächen der Kegel ABC, DEF umgekehrt wie ihre Höhen, und daher ist (Lehnsaz 4) der Kegel BAC dem DEF gleich.

Saz XIX. Fig. 18.

Iedem aus gleichschenklichen Kegeln zusammengesezten Rhombus ist ein Kegel gleich, dessen Grundfläche der Oberfläche des einen jener Kegel und dessen Höhe dem von der Spize des andern Kegels auf eine Seite des ersten gefällten Loth gleich ist.

Es sey $ABCD$ ein aus zwey gleichschenklichen Kegeln zusammengesezten Rhombus, der zur Grundfläche habe den Kreis um den Durchmesser BC und zur Höhe AD. Man seze einen andern Kegel GHK, dessen Grundfläche der Oberfläche des Kegels ABC und dessen Höhe dem vom Punkt D auf die AB oder ihre Verlängerung gefallten Loth gleich sey. Das Loth sey DF, HL die Höhe des Kegels, des Kegels GHK, und die HL der DF gleich. Ich behaupte, dass der Kegel dem Rhombus gleich sey.

Denn man seze einen andern Kegel MNO, dessen Grundfläche der Grundfläche des Kegels ABC und dessen Höhe der AD gleich sey. Seine Höhe sey NP. Da nun $NP = AD$, so ist $NP : DE = AD : DE$. Aber (Lehns. 1) wie die AD zu der DE, so verhält sich der Rhombus $ABCD$ zum Kegel BCD (E. V, 24), und wie NP zu DE, so verhält sich der Kegel MNO zum Kegel BCD; der Kegel MNO ist also dem Rhombus $ABCD$ gleich. Da nun die Oberfläche des Kegels ABC der Grundfläche des GHK gleich ist; so verhält sich die Oberfläche des ABC zu seiner Grundfläche wie die Grundfläche des GHK zur Grundfläche des MNO, welche leztere nämlich der Grundfläche des ABC gleich ist. Aber

wie die Oberfläche des *ABC* zu seiner Grundfläche, so verhält sich *AB* zu *BE* (Saz XVI), das ist, *AD* zu *DF*; denn die Dreyeke sind ähnlich. Folglich verhält sich die Grundfläche des Kegels *GHK* zur Grundfläche des Kegels *MNO* wie *AD* zu *DF*. Aber *AD* ist vermöge der Voraussezung = *NP* und *DF* = *LH*; mithin verhält sich die Grundfläche des Kegels *GHK* zur Grundfläche des Kegels *MNO* wie die Höhe *NP* zu der *HL*, die Grundflächen und Höhen der Kegel *GHK*, *MNO* sind umgekehrt proportionirt, und daher diese Kegel gleich (Lehns. 4.). Es ist aber bewiesen worden, dass der Kegel *MNO* dem Rhombus *ABCD* gleich sey; folglich ist auch der Kegel *GHK* dem Rhombus *ABCD* gleich.

Saz XX. Fig. 19.

Wenn ein gleichschenklicher Kegel durch eine seiner Grundfläche parallele Ebene geschnitten, auf dem hiedurch entstehenden Kreis ein Kegel, der seine Spize im Mittelpunkt der Grundfläche hat, beschrieben, und der hiedurch entstandene Rhombus von dem ganzen Kegel weggenommen wird; so wird dem Ueberrest ein Kegel gleich seyn, dessen Grundfläche der zwischen den parallelen Ebenen befindlichen Kegeloberfläche und dessen Höhe dem vom Mittelpunkt der Grundfläche der ersten Kegels auf eine Seite desselben gefällten Loth gleich ist.

Es sey *ABC* ein gleichschenklicher Kegel, der von einer seiner Grundfläche parallelen Ebene geschnitten werde, wodurch der Schnitt *DE* entstehe. Der Mittelpunkt der Grundfläche sey *F*, und auf dem Kreis um den Durchmesser *DE* ein Kegel beschrieben, der *F* zur Spize habe. So wird *BDFE* ein aus gleichschenklichen Kegeln zusammengesezter Rhombus seyn. Nun seze man einen Kegel *KHL*, dessen Grundfläche der zwischen *DE*, *AC* befindlichen Kegeloberfläche und dessen Höhe den vom Punkt *F* auf *AB* gefällten Loth *FG* gleich sey. Ich behaupte, dass, wenn vom Kegel *ABC* der Rhombus *BDFE* hinweggenommen gedacht wird, dem Ueberrest der Kegel *KHL* gleich seyn werde.

Denn man seze zwey Kegel *MNO*, *PQR*, so dass die Grundfläche des *MNO* der Oberfläche des Kegels *ABC* und seine Höhe der *FG* gleich sey; daher denn der Kegel *MNO* dem Kegel *ABC* gleich seyn wird: denn wenn von zwey gleichschenklichen Kegeln des einen Oberfläche der Grundfläche des andern, und das vom Mittelpunkt der Grundfläche des ersten auf eine Seite desselben gefallte Loth der Höhe des andern gleich ist, so sind die Kegel gleich (Saz XVIII.); die Grundfläche des Kegels *PQR* aber der Oberfläche des Kegels *BDE* und seine Höhe der *FG* gleich sey; daher denn der Kegel *PQR* dem Rhombus *BDFE* gleich ist, vermöge des erwiesenen (Saz XIX). Da nun die Oberfläche des Kegels *ABC* aus der Oberfläche des *BDE* und der zwischen *DE*, *AC* befindlichen besteht, die Oberfläche des Kegels *ABC* aber der Grundfläche des Kegels *MNO*, die Oberfläche des *BDE* der Grundfläche des *PQR*, und die zwischen *DE*, *AC* befindliche der Grundfläche des Kegels *HKL* gleich ist; so ist die Grundfläche des *MNO* den Grundflächen der *HKL*, *PQR* zusammen gleich. Ung diese Kegel haben einerley Höhe. Folglich ist der Kegel *MNO* den Kegeln *KHL*, *PQR* zusammen gleich (Lehns. 1. E. V, 24.). Aber der Kegel *MNO* ist dem Kegel *ABC*, der Kegel *PQR* aber dem Rhombus *BDEF* gleich. Folglich ist der übrigbleibende Kegel *HKL* dem Ueberreste gleich.

Saz XXI. Fig. 20.

Wenn von den einen Rhombus zusammensezenden gleichschenklichen Kegeln der eine durch eine seiner Grundfläche parallele Ebene geschnitten, auf dem hiedurch entstehenden Kreis ein Kegel, der die nämliche Spize mit dem andern jener Kegel hat, beschrieben, und der hiedurch entstandene Rhombus von dem ganzen hinweggenommen wird; so ist dem Ueberrest ein Kegel gleich, dessen Grundfläche der zwischen den parallelen Ebenen befindlichen Kegeloberfläche und dessen Höhe dem von der Spize des andern Kegels auf die Seite des ersten gefällten Loth gleich ist.

Es sey *ABCD* ein aus gleichschenklichen Kegeln zusammengesezter Rhombus, und der eine Kegel werde durch eine der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, und der

Durchschnitt sey *EF*, auf dem Kreis um den Durchmesser *EF* aber sey ein Kegel beschrieben, der den Punkt *D* zur Spize habe; so wird hiedurch der Rhombus *EBFD* entstanden seyn, und man gedenke sich diesen von dem ganzen Rhombus hinweggenommenen. Man seze ferner einen Kegel *HKL*, dessen Grundfläche der zwischen *AC*, *EF* befindlichen Oberfläche und dessen Höhe dem vom Punkt *D* auf die *BA* oder ihre Verlängerung gefällten Loth gleich sey. Ich behaupte, dass der Kegel *HKL* dem erwähnten Ueberrest gleich sey.

Denn man seze zwey Kegel *MNO*, *PQR*, und die Grundfläche des Kegels *MNO* sey der Oberfläche des Kegels *ABC*, seine Höhe der *DG* gleich; daher denn vermöge des bewiesenen (Saz XIX) der Kegel *MNO* dem Rhombus *ABCD* gleich ist: die Grundfläche des Kegels *PQR* aber sey der Oberfläche des Kegels *EBF*, und seine Höhe der *DG* gleich; daher ebenfalls der Kegel *PQR* dem Rhombus *EBFD* gleich ist. Da nun wiederum die Oberfläche des Kegels *ABC* aus der des *EBF* und der zwischen *EF*, *AC* befindlichen besteht, die Oberfläche des Kegels *ABC* aber der Grundfläche des *MNO*, die Oberfläche des Kegels *EBF* der Grundfläche des Kegels *PQR*, und die zwischen *EF*, *AC* befindliche der Grundfläche des Kegels *HKL* gleich ist; so ist die Grundfläche des *MNO* den Grundflächen der *PQR*, *HKL* zusammen gleich, und da die Kegel die nämliche Höhe haben, auch der Kegel *MNO* den Kegeln *HKL*, *PQR* gleich (Lehns. 1.). Aber der Kegel *MNO* ist dem Rhombus *ABCD*, der Kegel *PQR* dem *EBFD* gleich. Folglich ist auch der übrigbleibende Kegel *HKL* dem übrigbleibenden Reste gleich.

Saz XXII. Fig. 24.

Wenn in einen Kreis ein gleichseitiges Vieleck von einer geraden Anzal Seiten beschrieben wird, und die Seiten des Vieleks durch Sehnen verbunden werden, welche irgend einer Sehne, auf der zwo von diesen Seiten stehen, parallel sind; so haben alle diese Sehnen zusammengenommen zum Durchmesser des Kreises das nämliche Verhältnis, welches die Sehne, auf der eine we-

niger als die halbe Anzal der Seiten steht, zur Seite des Vieleks hat.

Es sey ein Kreis *ABCD*, und in demselben ein Vielek *AEFBGHCMNDLK* beschrieben, und die geraden Linien *EK*, *FL*, *BD*, *GN*, *HM* gezogen, welche offenbar der Sehne, auf welchen zwo Seiten des Vieleks stehen parallel sind (E. III, 28. 27. I, 27.). Ich behaupte, dass alle diese geraden Linien zusammen zum Durchmesser des Kreises *AC* das nämliche Verhältniss haben, wie *CE* zu *EA*.

Denn man ziehe *EK*, *LB*, *GD*, *HN*. So ist die *FK* der *EA*, die *BL* der *FK*, die *DG* der *BL*, die *HN* der *DG*, und die *CM* der *HN* parallel (E. III, 28. 27. I, 27.). Und da die zwo *EA*, *KF* parallel und die beyden *EK*, *AP* gezogen sind, so ist $EO:OA=KO:OP$ (E. VI, 2. Cor.); ebenso ist $KO:OP=FQ:QP$, $FQ:QP=QL:QR$, $QL:QR=BS:SR$, $BS:SR=SD:ST$, $SD:ST=GV:VT$, $GV:VT=NV:VW$, $NV:VW=HX:XW$, $HX:XW=MX:XC$. Nun verhalten sich alle Vorderglieder zu allen Hintergliedern wie eines zu einem (E. V, 12.). Also $EO:OA=EK+FL+BD+GN+HM$: Durchmesser *AC*. Aber $EO:OA=CE:EA$ (E. VI, 8. 4.). Folglich $CE:EA=EK+FL+BD+GN+HM$: Durchmesser *AC*.

Satz XXIII. Fig. 21.

Wenn in einen Kreisabschnitt ein Vielek beschrieben wird, welches ohne die Grundlinie eine gerade Anzal gleicher Seiten hat, und der Grundlinie des Abschnitts parallele Sehnen gezogen werden, welche die Seiten des Vieleks verbinden; so hat die Summe aller dieser Sehnen und der halben Grundlinie zur Höhe des Abschnitts das nämliche Verhältniss wie die vom Durchmesser des Kreises an die Seite des Vieleks gezogene gerade Linie zur Seite des Vieleks.

Es sey im Kreis *ABC* eine gerade Linie *AC* gezogen, und auf der *AC* in den Abschnitt *ABC* ein Vielek von einer geraden Anzal gleicher Seiten ohne die Grundlinie *AC* beschrieben; ferner seyen die geraden Linien *FG*, *EH*,

gezogen, welche der Grundlinie des Abschnitts parallel sind. Ich behaupte, dass die FG, EH, AO zusammen zu BO sich verhalten wie DF zu FB.

Denn man ziehe wiederum die geraden Linien GE, HA; so sind diese der BF parallel. Daher $KF:KB = GK:KL = EM:ML = MH:MN = OA:ON$. Nun verhalten sich alle Vorderglieder zu den Hintergliedern wie eines zu einem (E. V, 12.). Mithin $FG+EH+AO : BO = FK:KB$. Aber $FK:KB = DF:FB$ (E. VI, 8. 4.). Folglich $DF:FB = FG+EH\pm AO:BO$.

Saz XXIV. Fig. 22.

Es sey in einer Kugel ein gröster Kreis $ABCD$ und in diesen ein gleichseitiges Vielek beschrieben, dessen Seitenanzal von der Zal 4 gemessen werde *). Die AC, BD seyen Durchmesser. Wenn nun der Kreis $ABCD$ mit seinem Vielek um den unverrükten Durchmesser AC herumgedrehet wird, so wird offenbar seine Peripherie auf der Oberfläche der Kugel sich bewegen, die Winkel des Vieleks aber, ausgenommen die bey den Punkten A, C werden sich in Peripherien von Kreisen bewegen, die in der Oberfläche der Kugel auf dem Kreis $ABCD$ senkrecht beschrieben sind, und deren Durchmesser die der BD parallelen die Winkel des Vieleks verbindenden geraden Linien seyn werden. Die Seiten des Vieleks aber werden sich in Kegeloberflächen bewegen; die Seiten AF, AN nämlich in der Oberfläche eines Kegels, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser FN und dessen Spize A ist; die Seiten GF, MN in der Oberfläche eines Kegels, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser GM und dessen Spize der Punkt ist, in welchem die Seiten GF, MN verlängert mit einander und mit AC zusammen treffen; die Seiten BG, DM in der Oberfläche eines Kegels, dessen Grundfläche der Kreis um den Durhmesser BD, welcher auf dem Kreis $ABCD$ senkrecht steht, und dessen Spize der Punkt ist, in welchem die BG, DM verlängert mit einander und mit CA zusammentreffen. Ebenso werden auch die Seiten in der andern Halbkugel sich in ähnlichen Kegeloberflächen bewegen. Nun wird in die Ku-

*) Durch diese Bedingung wird erhalten, dass jede Seite des Vieleks bey ihrer Umdrehung um den Durchmesser in einer Kegeloberfläche, keine in einer cylindrischen sich bewegt. Eut.

Denn man ziehe die geraden Linien, EK, HM, auf welchen zwo Seiten stehen, und die ihnen parallelen FL, BD, GN. Man seze ferner einen Kreis R, von dessen Halbmesser das Quadrat dem Rechtek $EA \times (EK + FL + BD + GN + HM)$ gleich sey. So ist vermöge des vorhin bewiesenen (Saz XXV.) der Kreis der Oberfläche der genannten Figur gleich. Und da, wie bewiesen worden ist (S.XXII.) die Summe $EK+FL+BD+GN+HM$: Durchmesser $AC = CE : EA$, so ist das Rechtek aus jener Summe und EA, das ist, das Quadrat des Halbmessers des Kreises R dem Rechtek ACE gleich. Aber das Rechtek ACE ist kleiner als das Quadrat der AC. Folglich ist das Quadrat des Halbmessers des Kreises R kleiner als das Quadrat der AC, und daher der Durchmesser des Kreises R kleiner als der doppelte Durchmesser des Kreises $ABCD$; mithin zweymal der Durchmesser des Kreises $ABCD$ grösser als der Durchmesser des Kreises R, und viermal das Quadrat vom Durchmesser des Kreises $ABCD$, das ist, von AC grösser als das Quadrat des Durchmessers des Kreises R. Aber wie viermal das Quadrat von AC zum Quadrat vom Durchmesser des Kreises R, so verhalten sich vier Kreise $ABCD$ zum Kreise R. Vier Kreise $ABCD$ sind also grösser als der Kreis R; mithin ist der Kreis R kleiner als das Vierfache des grösten Kreises. Der Kreis R ist aber, wie bewiesen wurde, der erwähnten Oberfläche der Figur gleich. Folglich ist die Oberfläche der Figur kleiner als das Vierfache des grösten Kreises der Kugel.

Saz XXVII. Fig. 25.

Der in die Kugel beschriebenen von den Kegeloberflächen eingeschlossenen Figur ist ein Kegel gleich, dessen Grundfläche der Oberfläche der in die Kugel beschriebenen Figur und dessen Höhe dem vom Mittelpunkt der Kugel auf eine Seite des Vieleks gefällten Loth gleich ist.

Es sey die Kugel und der gröste Kreis derselben $ABCD$ und das übrige ebenso wie vorhin. Ferner sey R ein geradstehender Kegel, dessen Grundfläche der Oberfläche der in die Kugel beschriebenen Figur und dessen Höhe dem vom Mittelpunkt der Kugel auf eine Seite des Vieleks ge-

fallten Loth gleich sey. So ist zu beweisen, dass der Kegel *R* der in die Kugel beschriebenen Figur gleich sey.

Denn es seyen auf den Kreisen, deren Durchmesser *NF*, *MG*, *LH*, *KI* sind, Kegel beschrieben, welche den Mittelpunkt der Kugel zur Spize haben; so entsteht ein körperlicher aus zwey Kegeln bestehender Rhombus; von welchen der eine den Kreis um *NF* zur Grundfläche und den Punkt *A* zur Spize, der andere die nämliche Grundfläche und den Punkt *X* zur Spize hat. Dieser ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Oberfläche des Kegels *NAF* und dessen Höhe dem von *X* auf die *AF* gefallten Loth gleich ist (Saz XIX). Wiederum ist der von der Kegeloberfläche, welche zwischen den durch *NF*, *MG* gehenden parallelen Ebenen liegt, und den Oberflächen der Kegel *NFX*, *MGX* eingeschlossene Ueberrest vom Rhombus einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der zwischen den parallelen Ebenen *NF*, *MG* befindlichen Kegeloberfläche und dessen Höhe dem von *X* auf die *FG* gefallten Loth gleich itt (Saz XXI.). Ferner ist der von der Kegeloberfläche, welche zwischen den durch *MG*, *DB* gehenden parallelen Ebenen liegt, und der Oberfläche des Kegels *MXG* und dem Kreis um den Durchmesser *DB* eingeschlossene Kegelüberrest einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der zwischen den Ebenen durch *MG*, *DB* befindlichen Kegeloberfläche und dessen Höhe dem von *X* auf die *GB* gefallten Loth gleich ist (Saz XX.). Ebenso sind auch in der andern Halbkugel der Rhombus *XKCI* und die Kegelüberreste so vielen und so grossen Kegeln gleich, als die eben genannten waren. Folglich ist auch offenbar die ganze in die Kugel beschriebene Figur allen den genannten Kegeln zusammen gleich. Diese Kegel aber sind gleich dem Kegel *R*, weil dessen Höhe der Höhe jedes der genannten Kegel und seine Grundfläche ihren Grundflächen zusammen gleich ist (Lehns. I. V, 24.). Folglich ist die in die Kugel beschriebene Figur dem erwähnten Kegel gleich.

Saz XXVIII. Fig. 26.

Die in die Kugel beschriebene von den Kegeloberflächen eingeschlossene Figur ist kleiner als das Vierfache eines Kegels, dessen Grundfläche dem

grösten Kreis der Kugel und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Denn es sey *R* der Kegel, welcher der in die Kugel beschriebenen Figur gleich ist, dessen Grundfläche der Oberfläche der darein beschriebenen Figur und dessen Höhe dem vom Mittelpunkt des Kreises auf eine Seite des darein beschriebenen Vieleks gefällten Loth gleich ist (Saz XXVII.). Ferner sey *O* der Kegel, dessen Grundfläche dem grösten Kreis der Kugel und dessen Höhe dem Halbmesser des Kreises *ABCD* gleich ist.

Weil nun die Grundfläche des Kegels *R* der Oberfläche der in die Kugel beschriebenen Figur und seine Höhe dem von *X* auf *AF* gefällten Loth gleich ist, die Oberfläche der in die Kugel beschriebenen Figur aber, wie bewiesen worden (Saz XXVI.), kleiner ist als das Vierfache des grösten Kreises der Kugel; so ist die Grundfläche des Kegels *R* kleiner als das Vierfache der Grundfläche des Kegels *O*. Es ist aber auch die Höhe des Kegels *R* kleiner als die Höhe des Kegels *O*. Da demnach die Grundfläche des Kegels *R* kleiner als das Vierfache der Grundfläche des Kegels *O* und seine Höhe kleiner als die des leztern ist; so ist auch der Kegel *R* selbst kleiner als das Vierfache des Kegels *O*. Der Kegel *R* aber ist der in die Kugel beschriebenen Figur gleich. Folglich ist die in die Kugel beschriebenen Figur kleiner als das Vierfache des Kegels *O*.

Saz XXIX. Fig. 27.

Es sey in einer Kugel ein gröster Kreis *ABCD*, und um denselben ein gleichseitiges und gleichwinkliches Vieleck beschrieben, dessen Seitenanzal von der Zal 4 gemessen werde. Dieses um den Kreis beschriebene Vielek schliesse ein darum beschriebener mit dem *ABCD* concentrischer Krels ein. Nun drehe sich um die unverrükt bleibende *EG* die Ebene *EFGH* herum, in welcher so wohl das Vielek als die Kreise sind. So wird die Peripherie des Kreises *ABCD* in der Oberfläche der Kugel, die Peripherie des Kreises *EFGH* aber in einer andern Oberfläche einer mit der kleineren concentrischen Kugel sich bewegen. Ferner werden die Berührungspunkte der Seiten auf dem Kreis *ABCD* senkrecht stehende Kreise in der kleineren Kugel beschrieben.

Die Winkel des Vieleks aber ausser denen bey *E* und *G* werden sich in Peripherien von Kreisen bewegen, die in der Oberfläche der grösseren Kugel liegen und auf dem Kreis *EFGH* senkrecht stehen. Die Seiten des Vieleks werden, wie in der vorhin betrachteten Kugel, in Kegeloberflächen sich bewegen. Die von den Kegeloberflächen eingeschlossene Figur nun wird um die kleinere und in die grössere Kugel beschrieben seyn. Dass aber die Oberfläche der um die Kugel beschriebenen Figur grösser sey als die Oberfläche der Kugel, wird so bewiesen werden:

Es sey *KD* der Durchmesser eines Kreises in der kleineren Kugel, indem *K*, *D* zwey Punkte seyen, in welchen zwo Seiten des um den Kreis *ABCD* beschriebenen Vieleks diesen Kreis berühren. Indem nun die Kugel von der durch *KD* gehenden auf dem Kreis *ABCD* senkrecht stehenden Ebene getheilt ist, wird auch die Oberfläche der um die Kugel beschriebenen Figur von der Ebene getheilt seyn. Und offenbar haben sie die nämlichen Grenzen in der Ebene; denn beyder Grenze ist die Peripherie des auf dem Kreis *ABCD* senkrecht stehenden Kreises um den Durchmesser *KD*; und beyde sind gegen einerley Seite hohl, und die eine von ihnen ist von der andern Oberfläche und der zwischen den nämlichen Grenzen befindlichen Ebene eingeschlossen. Demnach ist die eingeschlossene Oberfläche des Kugelstüks kleiner als die Oberfläche der darum beschriebenen Figur (Angen. S. 4). Ebenso ist auch die Oberfläche des andern Kugelstüks kleiner als die Oberfläche der um dasselbe beschriebenen Eigur. Mithin ist die ganze Oberfläche der Kugel kleiner als die Oberfläche der um dieselbe beschriebenen Figur.

Satz XXX.

Der Oberfläche der um die Kugel beschriebenen Figur ist einem Kreise gleich, von dessen Halbmesser das Quadrat dem von einer Seite des Vieleks und der geraden Linie eingeschlossenen Rechtek gleich ist, die den Sehnen zusammen gleich ist, welche die Winkel des Vieleks verbinden und einer von den Sehnen, auf welchen zwo Seiten des Vieleks stehen, parallel sind.

Denn die um die kleinere Kugel beschriebene Figur ist in die grössere Kugel beschrieben. Es ist aber gezeigt worden (Saz XXV.), dass der Oberfläche einer in die Kugel beschriebenen von den Kegeloberflächen eingeschlossenen Figur ein Kreis gleich sey, von dessen Halbmesser das Quadrat dem von einer Seite des Vieleks und der geraden Linie eingeschlossenen Rechtek gleich ist, die den geraden Linien zusammen gleich ist, welche die Winkel des Vieleks verbinden und einer der geraden Linien, auf denen zwo Seiten stehen, parallel sind. Hieraus ergibt sich das behauptete.

Saz XXXI. Fig. 28.

Die Oberfläche der um die Kugel beschriebenen Figur ist grösser als das Vierfache des grösten Kreises der Kugel.

Es sey die Kugel, der Kreis und alles andere, wie vorhin; und der Kreis *L* der Oberfläche der um die kleinere Kugel beschriebenen Figur gleich.

Da nun in den Kreis *EFGH* ein gleichseitiges Viek von einer geraden Anzal Seiten beschrieben ist, so haben die der *FH* parallelen, die Winkel des Vieleks verbindenden geraden Linien zusammen zu *FH* das nämliche Verhältnis wie *KH* zu *KF* (S. XXII). Folglich ist das von einer Seite des Vieleks und der Summe aller der geraden Linien, welche die Winkel des Vieleks verbinden, eingeschlossene Rechtek dem Rechtek *FHK* gleich. Daher ist das Quadrat des Halbmessers des Kreises *L* dem Rechtek *FHK* gleich (Saz XXV.); mithin der Halbmesser von *L* grösser als *HK*. Die *HK* aber ist dem Durchmesser des Kreises *ABCD* gleich; denn sie ist das doppelte von *XS* dem Halbmesser des Kreises *ABCD* (E. VI, 4.). Folglich ist der Kreis *L*, das ist, die Oberfläche der um die kleinere Kugel beschriebenen Figur grösser als das Vierfache des grösten Kreises der Kugel.

Saz XXXII.

Der um die kleinere Kugel beschriebenen Figur ist ein Kegel gleich, dessen Grundfläche der

Oberfläche der Figur und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Denn die um die kleinere Kugel beschriebene Figur ist in die grössere beschrieben. Es ist aber gezeigt worden (Saz XXVII), dass der darein beschriebenen von den Kegeloberflächen eingeschlossenen Figur ein Kegel gleich sey, dessen Grundfläche der Oberfläche der Figur und dessen Höhe dem vom Mittelpunkt auf eine Seite des Vieleks gefällten Loth gleich ist. Dieses Loth ist aber dem Halbmesser der kleinern Kugel gleich. Hieraus ergibt sich das gesagte.

Saz XXXIII.

Hieraus folgt, dass die um die kleinere Kugel beschriebene Figur grösser ist als das Vierfache eines Kegels, der einen grösten Kreis der Kugel zur Grundfläche und den Halbmesser derselben zur Höhe hat.

Denn da der Figur ein Kegel gleich ist, dessen Grundfläche ihre Oberfläche und dessen Höhe dem vom Mittelpunkt auf eine Seite des Vieleks gefällten Loth gleich ist (Saz XXXII); die Oberfläche der um die Kugel beschriebenen Figur aber grösser als das Vierfache des grösten Kreises der Kugel ist (Saz XXXI.); so wird die um die Kugel beschriebene Figur grösser als das Vierfache des Kegels seyn, der den grösten Kreis zur Grundfläche und den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat, weil nämlich der der Figur gleiche Kegel grösser als das Vierfache des genannten Kegels ist, da seine Grundfläche grösser als das Vierfache der Grundfläche des leztern und seine Höhe der des leztern gleich ist (Lehns. I).

Saz XXXIV. Fig. 29.

Wenn durch die Umdrehung ähnlicher Vieleke eine Figur in eine Kugel und eine andere darum beschrieben ist, auf dieselbe Art wie vorhin; so hat die Oberfläche der darum beschriebenen Figur zur Oberfläche der darein beschriebenen das du-

plicirte Verhältnis von demjenigen, welches die Seite des um den grösten Kreis beschriebenen Vielek's zu der Seite des in den nämlichen Kreis beschriebenen Vieleks hat; die darum beschriebene Figur selbst aber hat zu der darein beschriebenen das triplicirte Verhältnis von dem nämlichen.

Es sey *ABCD* ein Kreis in einer Kugel und in denselben ein gleichseitiges Vielek beschrieben, dessen Seitenanzal von der Zal 4 gemessen werde; und es sey ein anderes dem darein beschriebenen ähnliches darum beschrieben, so dass die Seiten des darum beschriebenen Vieleks den Kreis in der Mitte der von den Seiten des darein beschriebenen abgeschnittenen Bögen berühren. Es seyen *EG*, *FH* auf einander senkrechte und mit den Durchmessern *AC*, *BD* in gleicher Richtung liegende Durchmesser des das um den ersten beschriebene Vielek einschliessenden Kreises; und man gedenke gerade Linien an die Winkel des Vieleks gezogen, welche unter einander und den *FH*, *BD* parallel sind. Wenn nun bey unverrükt bleibendem Durchmesser *EG* die Umfänge der Vieleke sich um die Peripherie des Kreises drehen, so wird eine Figur in die Kugel um eine andere darum beschrieben seyn. Nun ist zu beweisen, dass die Oberfläche der darum beschriebenen Figur zur Oberfläche der darein beschriebenen das duplicirte Verhältnis von dem der *EL* zu der *AK* habe, die darum beschriebene Figur aber zu der darein beschriebenen das triplicirte Verhältnis vom nämlichen.

Es sey der Kreis *M* der Oberfläche der um die Kugel, der Kreis *N* der Oberfläche der darein beschriebenen Figur gleich. So ist das Quadrat des Halbmessers von *M* gleich dem Rechtek aus *EL*, und der Summe aller der die Winkel des darum beschriebenen Vieleks verbindenden Sehnen, das Quadrat des Halbmessers von *N* gleich dem Rechtek aus *AK* und der Summe aller der die Winkel des darein beschriebenen Vieleks verbindenden Sehnen (Saz XXX, XXV.). Und da die Vieleke ähnlich sind, so sind auch die von jenen geraden Linien, nämlich den die Winkel verbindenden, und den Seiten der Vieleke eingeschlossenen Rechteke einander ähnlich *). Sie verhalten

*) Nämlich es verhält sich jede Sehne im umbeschriebenen Vielek zur ähnlich liegenden im einbeschriebenen = *EL* : *AK*. Daher auch die Summe

sich also wie die Quadrate der Seiten der Vieleke (E. VI, 20. Cor.). Wie sich aber die genannten Rechteke verhalten, so verhalten sich die Quadrate der Halbmesser der Kreise M, N. Folglich verhalten sich die Halbmesser der Kreise M, N wie die Seiten der Vieleke. Die Kreise aber haben zu einander das duplicirte Verhältnis ihrer Durchmesser (E. XII, 2. VI, 20), und sind gleich den Oberflächen der darum und darein beschriebenen Figuren. Folglich hat die Oberfläche der um die Kugel beschriebenen Figur zur Oberfläche der darein beschriebenen das duplicirte Verhältnis von dem der EL zu der AK.

Man nehme nun zwey Kegel O, P; und der Kegel O habe zur Grundfläche einen Kreis gleich M, der Kegel P einen Kreis gleich N; der Kegel O habe zur Höhe den Halbmesser der Kugel, der Kegel P aber das vom Mittelpunkt auf AK gefällten Loth. So ist der Kegel O der um die Kugel beschriebenen Figur, der Kegel P aber der darein beschriebenen gleich, wie bewiesen worden ist (Saz XXXII, XXVII). Weil nun die Vieleke ähnlich sind, so hat die EL zur AK das nämliche Verhältnis wie der Halbmesser der Kugel zu dem aus dem Mittelpunkt der Kugel auf die AK gefällten Loth. Die Höhe des Kegels O verhält sich also zur Höhe des Kegels P wie EL zu AK. Folglich haben die Durchmesser der Grundflächen der Kegel O, P das nämliche Verhältnis wie ihre Höhen. Sie sind also ähnlich, und der Kegel O hat zum Kegel P das triplicirte Verhältnis von dem des Durchmessers des Kreises M zu dem des Durchmessers des Kreises N (Lehns. 5.). Folglich hat auch die um die Kugel beschriebene Figur zu der darein beschriebenen das triplicirte Verhältnis von dem, welches EL zu AK hat.

Saz XXXV. Fig. 30.

Die Oberfläche jeder Kugel ist das Vierfache des grösten Kreises derselben.

Es sey eine Kugel, und der Kreis A das Vierfache von ihrem grösten Kreise. Ich behaupte, dass der Kreis A der Oberfläche der Kugel gleich sey.

---

der Sehnen im ersten: Summe der Sehnen im andern = EL : AK (E. V. 11). Euklidus. beym XLVIII. Saz.

Wenn dis nicht ist, so ist er entweder grösser oder kleiner. Es sey fürs erste die Oberfläche der Kugel grösser als der Kreis *A*. Nun sind zwo ungleiche Grössen, die Oberfläche der Kugel und der Kreis *A*; man kann also zwo ungleiche gerade Linien nehmen, so dass die grössere zur kleinern ein kleineres Verhältnis habe als die Oberfläche der Kugel zum Kreis *A* (Saz III). Es seyen die *B*, *D* so genommen, und *C* eine mittlere Proportionallinie zwischen *B*, *D*. Man gedenke sich nun die Kugel von einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene in Kreis *ABCD* (Fig. 29) geschnitten, und ein Vielek in den Kreis und eines darum beschrieben, so dass das darum beschriebene dem darein beschriebenen ähnlich sey und die Seite des erstern zur Seite des leztern ein kleineres Verhältnis habe, als *B* zu *C* hat (Saz IV). So ist auch das duplicirte erste Verhältnis kleiner als das duplicirte andere. Das duplicirte Verhältnis von dem der *B* zu *C* nun ist das von *B* zu *D*; das duplicirte Verhältnis der Seite des darum beschriebenen Vieleks zur Seite des darein beschriebenen aber ist das der Oberfläche des darum beschriebenen Körpers zu dem darein beschriebenen (Saz XXXIV). Folglich hat die Oberfläche der um die Kugel beschriebenen Figur zur Oberfläche der darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als die Oberfläche der Kugel zum Kreis *A*: welches ungereimt ist. Denn die Oberfläche der um die Kugel beschriebenen Figur ist grösser als die Oberfläche der Kugel (Saz XXIX), die Oberfläche der darein beschriebenen Figur aber kleiner als der Kreis *A*; weil, wie beschrieben worden ist (Saz XXV), die Oberfläche der in die Kugel beschriebenen Figur kleiner als das Vierfache des grösten Kreises der Kugel, der Kreis *A* aber das Vierfache des grösten Kreises der Kugel ist. Die Oberfläche der Kugel ist also nicht grösser als der Kreis *A*.

Ich behaupte nun, dass sie auch nicht kleiner sey. Denn sie sey kleiner, wenns möglich ist. Man finde ebenfalls die geraden Linien *B*, *D*, so dass die *B* zu der *D* ein kleineres Verhältnis habe als der Kreis *A* zur Oberfläche der Kugel, und zwischen *B*, *D* sey *C* die mittlere Proportionallinie. Man beschreibe wieder ein Vielek in und um den Kreis, so dass die Seite des darum beschriebenen zur Seite des darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe als *B* zu *C*. So ist auch das erste duplicirt kleiner als das lezte duplicirt. Daher hat die Oberfläche der darum beschriebenen Figur zur Oberfläche der darein

beschriebenen ein kleineres Verhältnis als der Kreis *A* zur Oberfläche der Kugel; welches ungereimt ist. Denn die Oberfläche der darum beschriebenen Figur ist grösser als der Kreis *A* (Saz XXXI.), die Oberfläche der darein beschriebenen aber kleiner als die Oberfläche der Kugel (Saz XXIV.). Die Oberfläche der Kugel ist also auch nicht kleiner als der Kreis *A*. Es ist aber bewiesen worden, dass sie nicht grösser sey. Folglich ist die Oberfläche der Kugel dem Kreis *A*, das ist, dem Vierfachen ihres grösten Kreises gleich.

Saz XXXVI. Fig. 31.

Iede Kugel ist das Vierfache eines Kegels, dessen Grundfläche dem grösten Kreis der Kugel und dessen Höhe ihrem Halbmesser gleich ist.

Denn es sey eine Kugel und in ihr ein grösser Kreis *ABCD*. Wenn nun die Kugel nicht das Vierfache des genannten Kegels ist, so sey sie, wenns möglich ist, grösser als das Vierfache desselben. Nun sey *O* ein Kegel, dessen Grundfläche das Vierfache des Kreises *ABCD* und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist. So ist die Kugel grösser als der Kegel *O*. Nun sind zwo ungleiche Grössen, die Kugel und der Kegel; es lassen sich also zwo ungleiche gerade Linien nehmen, so dass die grössere zu der kleineren ein kleineres Verhältnis habe als die Kugel zum Kegel *O*. Es seyen *K*, *G* diese Linien, und die *I*, *H* so genommen, dass die Ueberschüsse der *K* über *I*, der *I* über *H*, der *H* über *G* einander gleich seyn *). Man gedenke sich nun in den Kreis *ABCD* ein Vielek beschrieben, dessen Seitenanzal von der Zal 4 gemessen werde, und ein anderes dem darein beschriebenen ähnliches darum, wie im vorhergehenden, so dass die Seite des darum beschriebenen zur Seite des darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe als *K* zu *I* (Saz IV.). Es seyen *AC*, *BD* auf einander senkrechte Durchmesser. Wenn nun um den unverrükt bleibenden Durchmesser *AC* die Ebene, in welcher die Vieleke sind, sich herumdreht, so wird eine Figur um die Kugel und eine darein beschrieben seyn, und die darum beschriebene wird zur darein be-

*) Man nehme $H = G + \frac{1}{3}(K-G)$, $I = H + \frac{2}{3}(K-G)$. Eutocius.

schriebenen das triplicirte Verhältnis von der Seite des um den Kreis *ABCD* beschriebenen Vieleks zur Seite des darein beschriebenen haben (Saz XXXIV.). Aber die erstere Seite hat zur leztern ein kleineres Verhältnis als *K* zu *I*. Folglich hat die darum beschriebene Figur zur darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als das triplicirte der *K* zu *I*. Es hat aber *K* zu *G* ein grösseres Verhältnis als das triplicirte von dem der *K* zu *I* (E. V, 25. Cor.). Folglich hat um so viel mehr die darum beschriebene Figur zu der darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als *K* zu *G*. *K* aber hat zu *G* ein kleineres als die Kugel zum Kegel *O*; (folglich auch die um die Kugel beschriebene Figur zur darein beschriebenen ein kleineres als die Kugel zum Kegel *O*). und *verwechselt*; welches unmöglich ist. Denn die darum beschriebene Figur ist grösser als die Kugel, die darein beschriebene aber kleiner als der Kegel *O*, weil der Kegel *O* das Vierfache eines Kegels, dessen Grundfläche dem Kreis *ABCD* und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist, die darein beschriebene Figur aber kleiner als das Vierfache eines solchen Kegels ist (Saz XXVIII.). Die Kugel ist also nicht grösser als das Vierfache des genannten Kegels.

Sie sey, wenns möglich ist, kleiner als das Vierfache desselben; so ist die Kugel kleiner als der Kegel *O*. Man nehme die geraden Linien *K*, *G*, so dass *K* grösser sey als *G*, aber zu *G* ein kleineres Verhältnis habe als der Kegel *O* zur Kugel. Man seze die *H*, *I*, so wie vorhin, und gedenke ein Vielek in den Kreis *ABCD* und eines darum beschrieben, so dass die Seite des darum beschriebenen zur Seite desdarein beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe als *K* zu *I*, und das übrige auf die nämliche Art construirt wie vorhin. Nun wird die um die Kugel beschriebene körperliche Figur zu der darein beschriebenen das triplicirte Verhältnis von demjenigen haben, welches die Seite des um den Kreis *ABCD* beschriebenen Vieleks zur Seite des darein beschriebenen hat (Saz XXXIV.). Erstere Seite aber hat zur leztern ein kleineres Verhältnis als *K* zu *I*. Folglich wird die darum beschriebene Figur zur darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis haben als das triplicirte von dem der *K* zur *I*. *K* aber hat zu *G* ein grösseres Verhältnis als das triplicirte von *K* zu *I*. Demnach hat die darum beschriebene Figur zu der darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als *K* zu *G*: und *K* zu *G*

ein kleineres als der Kegel *O* zur Kugel. Welches unmöglich ist. Denn die in die Kugel beschriebene Figur ist kleiner als die Kugel, die darum beschriebene aber grösser als der Kegel *O* (Saz XXXIII.). Die Kugel ist also auch nicht kleiner als das Vierfache des Kegels, dessen Grundfläche dem Kreis *ABCD* und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist. Es ist aber bewiesen, dass sie auch nicht grösser sey. Sie ist also das Vierfache desselben.

Nachdem diese Saze bewiesen sind, so erhellt,

Saz XXXVII.

Dass jeder Cylinder, dessen Grundfläche ein gröster Kreis der Kugel und dessen Höhe dem Durchmesser derselben gleich ist, anderthalbmal so gros als die Kugel und seine Oberfläche, die Grundflächen mitgerechnet, anderthalbmal so gros als die Oberfläche der Kugel sey.

Denn der genannte Cylinder ist das Sechsfache des Kegels, der die nämliche Grundfläche und den Halbmesser zur Höhe hat (E. XII, 10. 14.), die Kugel aber ist vermöge des bewiesenen (Saz XXXVI) das Vierfache des nämlichen Kegels. Mithin ist der Cylinder anderthalbmal so gros als die Kugel.

Wiederum da die Oberfläche des Cylinders ohne die Grundflächen einem Kreise gleich bewiesen worden ist (Saz XIV), dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Seite des Cylinders und dem Durchmesser seiner Grundfläche ist; die Seite des genannten Cylinders um die Kugel aber dem Durchmesser der Grundfläche gleich, mithin auch jene mittlere Proportionallinie dem Durchmesser der Grundfläche gleich, der Kreis aber, dessen Halbmesser dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, das Vierfache der Grundfläche, das ist, des grösten Kreises der Kugel ist; so wird die Oberfläche des Cylinders ohne die Grundflächen das Vierfache des grösten Kreises seyn. Die ganze Oberfläche des Cylinders mit seinen Grundflächen wird also das sechsfache des grösten Kreises seyn. Nun ist aber die Oberfläche der Kugel das Vierfache des grösten Kreises (Saz XXXV.). Folglich

ist die ganze Oberfläche des Cylinders anderthalbmal so gros als die Oberfläche der Kugel *).

Saz XXXVIII. Fig. 32.

Die Oberfläche der in einen Kugelabschnitt beschriebenen Figur ist einem Kreise gleich, von dessen Halbmesser das Quadrat dem von einer Seite des in den Abschnitt des grösten Kreises beschriebenen Vieleks und von der Summe aller der Grundlinie des Abschnitts parallelen Sehnen nebst der Helfte der Grundlinie des Abschnitts eingeschlossenen Rechtek gleich ist.

Es sey eine Kugel und in ihr ein Abschnitt, dessen Grundfläche der Kreis um *AB* sey. In diesen sey auf dieselbe Art, wie schon mehrmalen erwähnt wurde, eine von Kegeloberflächen eingeschlossene Figur beschrieben. *ABG* sey ein gröster Kreis, und *ACEGFDB* ein Vielek von

*) Folgerungen aus den Säzen XXXV – XXXVII.

1. Die Oberfläche der Kugel ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist.

2. Die krumme Oberfläche der Halbkugel ist das Doppelte ihres grösten Kreises, und einem Kreise gleich, dessen Halbmesser der von ihrem Scheitel an die Peripherie ihrer Grundfläche gezogenen geraden Linie oder der Seite des in den grösten Kreis derselben beschriebenen Quadrats gleich ist.

3. Die Oberflächen der Kugeln sind in duplicirtem Verhältnis oder verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

4. Die Oberfläche der Kugel ist der krummen Oberfläche des um sie beschriebenen Cylinders gleich.

5. Die Kugel ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Oberfläche der Kugel und dessen Höhe ihrem Halbmesser gleich ist.

6. Kugeln sind im triplicirten Verhältnis oder verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser.

einer geraden Anzal Seiten ohne die Grundlinie *AB*. Man nehme einen Kreis *L*, von dessen Halbmesser das Quadrat dem von der Seite *AC* und der Summe aller *EF*, *CD* nebst der Helfte der Grundlinie, das ist, *AK* eingeschlossenen Rechtek gleich sey. So ist zu beweisen, dass der Kreis *L* der Oberfläche der Figur gleich sey.

Denn man nehme den Kreis *M*, von dessen Halbmesser das Quadrat dem Rechtek aus der Seite *EG* und der Helfte von *EF* gleich sey; so ist der Kreis *M* der Oberfläche des Kegels gleich, der den Kreis um *EF* zur Grundfläche und den Punkt *G* zur Spize hat (Saz XV. E. VI, 17.). Man nehme einen andern Kreis *N*, von dessen Halbmesser das Quadrat dem Rechtek aus *EC* und der halben Summe von *EF*, *CD* gleich sey; dieser wird der zwischen den parallelen durch *EF*, *CD* gehenden Ebenen befindlichen Kegeloberfläche gleich seyn (Saz XVII. E. VI, 17.). Man nehme ebenfalls einen andern Kreis *O*, von dessen Halbmesser das Quadrat dem Rechtek aus *AC* und der halben Summe von *CD*, *AB* gleich sey; dieser ist wiederum der zwischen den parallelen durch *CD*, *AB* gehenden Ebenen befindlichen Kegeloberfläche gleich. Alle diese Kreise zusammen nun werden der ganzen Oberfläche der Figur und die Quadrate ihrer Halbmesser zusammen werden dem Rechtek aus einer Seite *AC* und der Summe *EF*, *CD* nebst der halben Grundlinie *AK* gleich seyn. Nun war auch das Quadrat des Halbmessers des Kreises *L* dem nämlichen Rechtek gleich. Folglich ist der Kreis *L* den Kreisen *M*, *N*, *O* gleich (E. XII, 2. V, 24); also auch der Oberfläche der in den Kugelabschnitt beschriebenen Figur.

Saz XXXIX. Fig. 33.

Eine Kugel werde von einer Ebene geschnitten, die nicht durch den Mittelpunkt geht, und es sey in ihr *AEF* ein gröster Kreis auf der schneidenden Ebene senkrecht, und in den Abschnitt *ABC* sey ein gleichseitiges Vielek von einer geraden Anzal Seiten ohne die Grundlinie beschrieben. Wenn nun ebenso wie vorhin um die unverrükt bleibende *CF* die Figur herumgedreht wird, so werden die Winkel *D*, *E*, *A*, *B* sich in Kreisen bewegen, deren Durchmesser *DE*, *AB* sind, die Seiten der Figur aber in Kegeloberflächen. Hiedurch wird eine von Kegel-

oberflächen eingeschlossene körperliche Figur erzeugt werden, welche den Kreis, dessen Durchmesser AB ist, zur Grundfläche und C zur Spize hat. Diese wird eben so wie vorhin eine kleinere Oberfläche haben als der sie einschliessende Kugelabschnitt.

Denn der Abschnitt und die Figur haben die nämliche Grenze in einer Ebene, nämlich die Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser AB ist; auch sind die Oberflächen gegen einerley Seite hohl, und die eine ist von der andern eingeschlossen.

Saz XL. Fig. 32.

Die Oberfläche der in den Kugelabschnitt beschriebenen Figur ist kleiner als der Kreis, dessen Halbmesser der von der Spize des Abschnitts an die Peripherie des Kreises, welche des Abschnitts Grundfläche ist, gezogenen geraden Linie gleich ist.

Es sey eine Kugel und in ihr ein gröster Kreis $ABFE$. In der Kugel sey ein Abschnitt, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser AB sey, und in denselben die erwähnte Figur beschrieben, in den Kreisabschnitt aber ein Vielek, und das übrige wie vorhin, indem GL der Durchmesser der Kugel ist, und die LE, GA gezogen sind. Und es sey ein Kreis M, dessen Halbmesser der AG gleich ist. Es ist zu beweisen, dass der Kreis M grösser sey als die Oberfläche der Figur.

Denn es ist bewiesen worden (Saz XXXVIII), dass die Oberfläche der Figur einem Kreise gleich sey, von dessen Halbmesser das Quadrat dem Rechtek $EG \times (EF + CD + KA)$ gleich ist. Das Rechtek $EG \times (EF + CD + KA)$ aber ist gleich bewiesen worden (Saz XXII. E. VI, 16) dem Rechtek $EL \times GK$; und das Rechtek $EL \times GK$ ist kleiner als das Quadrat von GA, da das Rechtek LGK dem Quadrat von AG gleich ist (E. VI, 8. 37.). Folglich ist der Halbmesser des Kreises, welcher der Oberfläche der Figur gleich ist, kleiner als der Halbmesser von M; und daher der Kreis M grösser als die Oberfläche der Figur.

Saz XLI. Fig. 34.

Die in einen Kugelabschnitt (der kleiner als die Halbkugel ist) beschriebene von Kegeloberflächen eingeschlossene Figur nebst dem Kegel, der einerley Grundäche mit der Figur, zur Spize aber den Mittelpunkt der Kugel hat, ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Oberfläche der Figur und dessen Höhe dem vom Mittelpunkt der Kugel auf eine Seite des Vieleks gefällten Loth gleich ist.

Denn es sey eine Kugel und in ihr ein gröster Kreis und ein Abschnitt, der kleiner ist als ein Halbkreis, *ABC*, und *E* sey der Mittelpunkt. In den Abschnitt *ABC* sey wie im vorhergehenden ein Vielek von einer geraden Anzal Seiten ohne die *AC* beschrieben. Und indem die Kugel sich um die unverrükte *BE* herumdreht, werde eine von Kegeloberflächen eingeschlossene Figur, und auf dem Kreis um den Durchmesser *AC* ein Kegel beschrieben, der den Mittelpunkt zur Spize hat. Man nehme einen Kegel *K*, dessen Grundfläche der Oberfläche der Figur und dessen Höhe dem von *E* auf eine Seite des Vieleks gefällten Loth gleich sey. So ist zu beweisen, dass der Kegel *K* der eingeschlossenen Figur nebst dem Kegel *AEC* gleich sey.

Es seyen auch Kegel auf den Grundflächen um die Durchmesser *GH*, *FL* beschrieben, die den Punkt *E* zur Spize haben. Nun ist der körperliche Rhombus *GBHE* einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Oberfläche des Kegels *GHB* und dessen Höhe dem von *E* auf *GB* gefällten Loth gleich ist (Saz XIX.). Der Ueberrest aber, welcher von der zwischen den parallelen durch *GH*, *FL* gehenden Ebenen liegenden Oberfläche und den Kegeloberflächen *FEL*, *GEH* eingeschlossen ist, ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der zwischen den parallelen durch *GH*, *FL* gehenden Ebenen eingeschlossenen Oberfläche und dessen Höhe dem von *E* auf *FG* gefällten Lothe gleich ist (Saz XXI.). Der Ueberrest ferner, welcher von der zwischen den parallelen durch *FL*, *AC* gehenden Ebenen befindlichen Oberfläche und den Kegeloberflächen *AEC*, *FEL* eingeschlossen ist, ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der zwischen den parallelen durch *FL*, *AC* gehenden Ebenen eingeschlossenen Ober-

fläche und dessen Höhe dem von *E* auf *FA* gefällten Loth gleich ist. Die genannten Kegel nun werden der Figur nebst dem Kegel *AEC* gleich seyn. Die Höhe dieser Kegel nun ist dem von *E* auf eine Seite des Vieleks gefällten Loth, ihre Grundflächen aber zusammen sind der Oberfläche der Figur *AFGBHLC* gleich. Es hat aber auch der Kegel *K* die nämliche Höhe, und seine Grundfläche ist der Oberfläche der Figur gleich; er ist also den genannten Kegeln zusammen gleich. Von diesen aber ist bewiesen worden, dass sie der Figur nebst dem Kegel *AEC* gleich seyen. Folglich ist auch der Kegel *K* der Figur nebst dem Kegel *AEC* gleich.

Hieraus erhellet: dass ein Kegel, der den Kreis, dessen Halbmesser der vom Scheitel des Abschnitts an die Peripherie des Kreises, welcher des Abschnitts Grundfläche ist, gezogenen geraden Linie gleich ist, zur Grundfläche und eine dem Halbmesser der Kugel gleiche Höhe kat, grösser ist als die in den Abschnitt beschriebene Figur nebst dem Kegel.

Denn der erwähnte Kegel ist grösser als der Kegel, welcher der Figur nebst dem einerley Grundfläche mit der Figur und seine Spize im Mittelpunkt der Kugel habenden Kegel gleich ist, das ist, als der Kegel, dessen Grundfläche der Oberfläche der Figur und dessen Höhe dem vom Mittelpunkt auf eine Seite des Vieleks gefällten Loth gleich ist. Denn die Grundfläche des ersten ist, wie bewiesen worden (Saz XL.), grösser als die Grundfläche des zweyten, und die Höhe des ersten ist grösser als die Höhe des lezten.

Saz XLII. Fig. 35.

Es sey eine Kugel und in derselben ein gröster Kreis *ABC*. Von diesem sey ein Stük abgeschnitten, welches kleiner sey, als der Halbkreis, nämlich durch die *AB*. Der Mittelpunkt sey *D*, und von *D* seyen nach *A*, *B* die geraden Linien *AD*, *BD* gezogen, und um den entstandenen Ausschnitt ein Vielek und um dieses ein Kreis beschrieben. Dieser wird einerley Mittelpunkt mit dem Kreis *ABC* haben. Wenn nun das Vielek um die unverrükte

EK herumgedrehet wird, bis es wieder in seine vorige Lage kommt, so wird sich der darum beschriebene Kreis in der Oberfläche einer Kugel bewegen, und die Winkel des Vieleks werden Kreise beschrieben, deren Durchmesser die Winkel des Vieleks verbinden und der *AB* parallel sind. Die Berührungspunkte der Seiten des Vieleks mit dem kleinern Kreis aber werden Kreise in der kleinern Kugel beschreiben, deren Durchmesser die Berührungspunkte verbinden und der *AB* parallel seyn werden; die Seiten des Vieleks aber werden sich in Kegeloberflächen bewegen. Es wird alsdenn eine von Kegeloberflächen eingeschlossene Figur um die Kugel beschrieben seyn, deren Grundfläche der Kreis um *FG* ist. Die Oberfläche dieser Figur nun ist grösser als die Oberfläche des kleinern Abschnitts, dessen Grundfläche der Kreis um *AB* ist.

Denn man ziehe die Tangenten *AM*, *BN*. Diese werden sich in einer Kegeloberfläche bewegen, und die durch das Vielek *AMHELNB* entstehende Figur wird eine grössere Oberfläche haben als der Kugelabschnitt, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser *AB* ist; denn sie haben in der nämlichen Ebene zur Grenze den Kreis um den Durchmesser *AB*, und der Abschnitt ist von der Figur eingeschlossen. Aber die durch *FM*, *GN* entstandene Kegeloberfläche ist grösser als die durch *MA*, *NB* entstandene; denn die *FM* ist grösser als *MA*, weil sie dem rechten Winkel gegenüber liegt (E. III, 16.) und *FG* grösser als *AB* *). Folglich ist auch die Oberfläche der um die Kugel beschriebenen Figur grösser als die Oberfläche des Abschnitts der kleinern Kugel.

Saz XLIII.

Auch ist offenbar, dass die Oberfläche der um den Ausschnitt beschriebenen Figur einem Kreise gleich sey, von dessen Halbmesser das Quadrat dem von

*) Daher das Rechtek $FM \times \frac{1}{2}(FG + MN) >$ Rechtek $MA \times \frac{1}{2}(AB + MN)$. Nun sind diese Rechteke den Quadraten der Halbmesser der Kreise gleich, welche den genannten Kegeloberflächen gleich sind (Saz XVII). Mithin ist der Kreis, welcher der ersten gleich ist, grösser als der Kreis, welcher der andern gleich ist (E. XII, 2.), und die erste grösser als die andere.

einer Seite des Vieleks und der Summe der die Winkel des Vieleks verbindenden Sehnen nebst der halben Grundlinie des genannten Vieleks eingeschlossenen Rechtek gleich ist.

Denn die um den Ausschnitt beschriebene Figur ist eine in den Abschnitt der grössern Kugel beschriebene. Mithin ergibt sich der Saz aus dem obigen (Saz XXXVIII.).

Saz XLIV. Fig. 36.

Die Oberfläche der um den Ausschnitt beschriebenen Figur ist grösser als ein Kreis, dessen Halbmesser der von dem Scheitel des Abschnitts an die Peripherie des Kreises, welcher des Abschnitts Grundfläche ist, gezogenen geraden Linie gleich ist.

Denn es sey eine Kugel, deren gröster Kreis $ADBC$ und deren Mittelpunkt E sey. Um den Ausschnitt sey das Vielek LFK und um dieses ein Kreis beschrieben, und es werde eine Figur erzeugt wie vorhin. Nun sey ein Kreis N, von dessen Halbmesser das Quadrat dem Rechtek aus einer Seite des Vieleks und der Summe der die Winkel verbindenden Sehnen nebst der halben LK gleich sey. Dieses Rechtek ist gleich dem $MH \times FG$, indem FG die Höhe des Abschnitts der grössern Kugel ist. (Saz XXIII. E. VI, 16.). Das Quadrat des Halbmessers des Kreises N ist also = Rechtek $MH \times FG$.

Aber $FG > DO$; denn wenn wir KF ziehen, so wird diese der DA parallel seyn (E. VI, 2.): es ist aber auch LK der AB parallel, und FE gemeinschaftlich; mithin das Dreyek FKG dem DAO ähnlich; und $FK > AD$, folglich $FG > DO$. Ferner ist MH dem Durchmesser CD gleich; denn wenn EP gezogen wird, da $MP = PF$, $HE = EF$, so ist MH der EP parallel (E. VI, 2.), folglich $MH = 2EP$; und da auch $CD = 2EP$, $MH = CD$. Nun ist Rechtek $CDO = DA^q$. (Mithin Rechtek $MH \times FG$, welches $> CDO$, $> DA^q$).

Demnach ist die Oberfläche der Figur KFL grösser als der Kreis, dessen Halbmesser der von der Spize des Abschnitts an die Peripherie des Kreises um den Durchmesser

AB, welcher die Grundfläche des Abschnitts ist, gezogenen geraden Linie gleich ist. Denn der Kreis *N* ist der Oberfläche der um den Ausschnitt beschriebenen Figur gleich.

Saz XLV.

Weiter ist die um den Ausschnitt beschriebene Figur nebst dem Kegel, dessen Grundfläche der Kreis um *KL*, und dessen Spize der Mittelpunkt ist, einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Oberfläche der Figur und dessen Höhe dem vom Mittelpunkt auf die Seite gefällten Loth gleich ist, welches leztere dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Denn die um den Ausschnitt beschriebene Figur ist in den Abschnitt der grössern concentrischen Kugel beschrieben. Mithin ist das gesagte aus dem obigen (Saz XLI) klar.

Saz XLVI.

Hieraus erhellet, dass die um den Ausschnitt beschriebene Figur nebst dem Kegel grösser als ein Kegel sey, welcher den Kreis, dessen Halbmesser der vom Scheitel des Abschnitts der kleinern Kugel an die Peripherie des Kreises, der des Abschnitts Grundfläche ist, gezogenen geraden Linie gleich ist, zur Grundfläche und eine dem Halbmesser der Kugel gleiche Höhe hat.

Denn die Grundfläche des Kegels, welcher der Figur nebst dem Kegel gleich ist, (Saz XLV.), ist grösser als der erwähnte Kreis (Saz XLIV.), und seine Höhe dem Halbmesser der kleinern Kugel gleich.

Saz XLVII. Fig. 37.

Es sey wiederum eine Kugel und in derselben ein gröster Kreis, *ABC* ein Abschnitt kleiner als ein Halbkreis, *D* der Mittelpunkt. In den Abschnitt sey ein Vielek von

einer geraden Anzal Seiten und ein diesem ähnliches darum beschrieben, so dass die Seiten des einen denen des andern parallel seyen, und um das darum beschriebene Vielek sey ein Kreis beschrieben. Nun seyen wieder durch Herumdrehung der Kreise um die unverrükte *GB* Figuren erzeugt, welche von Kegeloberflächen eingeschlossen werden. Es ist zu beweisen, dass die Oberfläche der darum beschriebenen Figur zur Oberfläche der darein beschriebenen das duplicirte Verhältnis von demjenigen, welches die Seite des darum beschriebenen zur Seite des darein beschriebenen hat, die Figur nebst dem Kegel aber das triplicirte Verhältnis vom nämlichen habe.

Denn es sey *M* ein Kreis, von dessen Halbmesser das Quadrat dem Rechtek aus einer Seite des umbeschriebenen Vieleks und der Summe der die Winkel verbindenden Sehnen nebst der halben *EF* gleich sey; so wird der Kreis *M* der Oberfläche der umbeschriebenen Figur gleich seyn (Saz XLIII.). Ferner sey *N* ein Kreis, von dessen Halbmesser das Quadrat dem von einer Seite des darein beschriebenen Vieleks und von der Summe der seine Winkel verbindenden Sehnen nebst der halben *AC* eingeschlossenen Rechtek gleich sey; so wird dieser Kreis auch der Oberfläche der darein beschriebenen Figur gleich seyn (Saz XXVIII.). Aber die genannten Rechteke verhalten sich zu einander wie das Quadrat der Seite *EK* zum Quadrat der Seite *AL* *). Folglich auch wie das eine Vielek zum andern, so verhält sich der Kreis *M* zum Kreis *N*. Mithin hat auch die Oberfläche der darum beschriebenen Figur zur Oberfläche der darein beschriebenen das duplicirte Verhältnis von dem der *EK* zu *AL*, das nämliche, wie das eine Vielek zum andern.

Es sey wiederum ein Kegel *O*, der eine Grundfläche gleich dem Kreis *M* und den Halbmesser der kleinern Kugel zur Höhe habe; so ist dieser Kegel der um den Ausschnitt beschriebenen Figur nebst dem Kegel gleich, wel-

*) Denn die Rechteke sind ähnlich, weil so wohl $\frac{1}{2}$ EF : $\frac{1}{2}$ AC als auch jede Seite im umbeschriebenen Vielek zur ähnlich liegenden im einbeschriebenen, folglich auch (E. V, 12.) die Summe der Sehnen und der halben Grundlinie im ersten zur Summe der Sehnen und der halben Grundlinie im andern sich verhält wie EK zu AL. Kutocius.

cher den Kreis um *EF* zur Grundfläche und *D* zur Spize hat (Saz XLV.); und ein anderer Kegel *P*, der eine Grundfläche gleich dem Kreis *N* und das von *D* auf *AL* gefällte Loth zur Höhe habe; so wird auch dieser der darein beschriebenen Figur nebst dem Kegel gleich seyn, welcher den Kreis um den Durchmesser *AC* zur Grundfläche und den Punkt *D* zur Spize hat (Saz XLI.). Da nun die *EK* zum Halbmesser der kleinern Kugel wie die *AL* zu dem aus dem Mittelpunkt auf *AL* gefällten Loth, und zufolge des vorhin bewiesenen wie die *EK* zu *AL*, so der Halbmesser des Kreises *M* zum Halbmesser des Kreises *N* und der Durchmesser zum Durchmesser sich verhalten; so wird der Durchmesser des Kreises, welcher die Grundfläche von *O*, zum Durchmesser dessen, welcher die Grundfläche von *P* ist, sich verhalten wie die Höhe des Kegels *O* zur Höhe des Kegels *P*; die Kegel sind daher ähnlich, und der Kegel *O* hat zum Kegel *P* das triplicirte Verhältnis von demjenigen, welches der Durchmesser zum Durchmesser hat (Lehns. 5.). Folglich hat auch die darum beschriebene Figur zu der darein beschriebenen das triplicirte Verhältnis von dem, welches *EK* zu *AL* hat.

Saz XLVIII. Fig. 38.

Die Oberfläche eines jeden Kugelabschnitts, der kleiner ist, als die Halbkugel, ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser der vom Scheitel des Abschnitts an die Peripherie des Kreises, welcher des Abschnitts Grundfläche ist, gezogenen geraden Linie gleich ist.

Es sey eine Kugel und in derselben ein gröster Kreis *ABC*; *ABC* ein Abschnitt in derselben, der kleiner ist als die Halbkugel und den auf dem Kreis *ABC* senkrecht stehenden Kreis um *AC* zur Grundfläche hat. Es sey der Kreis *F* genommen, dessen Halbmesser *AB* gleich sey. Man soll erweisen, dass die Oberfläche des Abschnitts *ABC* dem Kreis *F* gleich sey.

Wenn dis nicht ist, so sey die Oberfläche grösser als der Kreis *F*. Man nehme den Mittelpunkt *D*, ziehe von *D* nach *A*, *C* gerade Linien und verlängere dieselbe. Da nun zwo ungleiche Grössen sind, die Oberfläche des Abschnitts und der Kreis *F*, so beschreibe man in den

Ausschnitt *ABC* ein gleichseitiges Vielek von einer gerden Anzal Winkel, und ein anderes diesem ähnliches darum, so dass das darum beschriebene zum darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe als die Oberfläche des Kugelabschnitts zum Kreise (Saz VI.). Wenn nun der Kreis wie vorhin herumgedreht wird, so werden zwo von Kegeloberflächen eingeschlossene Figuren, die eine um den Ausschnitt, die andere darein beschrieben seyn; und die Oberfläche der darum beschriebenen wird sich zur Oberfläche der darein beschriebenen verhalten, wie das um den Kreisausschnitt beschriebene Vielek zum darein beschriebenen; denn jedes dieser Verhältnisse ist das duplicirte von dem, welches die Seite des darein beschriebenen Vieleks zur Seite des darein beschriebenen hat (Saz XLVII. E. VI, 20.). Aber das darum beschriebene Vielek hat zu dem darein beschriebenen (mithin auch die Oberfläche der um den Abschnitt beschriebenen Figur zur Oberfläche der darein beschriebenen) ein kleineres Verhältnis als die Oberfläche des genannten Abschnitts zum Kreis *F*; und die Oberfläche der darum beschriebenen Figur ist grösser als die Oberfläche des Abschnitts (Saz XLII.). Folglich ist die Oberfläche der darein beschriebenen Figur grösser als der Kreis *F*; welches unmöglich ist: denn es ist bewiesen worden, dass die erwähnte Oberfläche der Figur kleiner sey als ein solcher Kreis (Saz XL.).

Es sey hingegen der Kreis grösser als die Oberfläche. Man beschreibe wieder auf ähnliche Art ähnliche Vieleke in und um den Ausschnitt, und das darum beschriebene habe zu dem darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als der Kreis *F* zur Oberfläche des Abschnitts. Da nun wie das darum beschriebene Vielek zum darein beschriebenen, so die Oberfläche der darum beschriebenen Figur zur Oberfläche der darein beschriebenen sich verhält; so wird auch die Oberfläche der darum beschriebenen Figur zur Oberfläche der darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis haben als der Kreis *F* zur Oberfläche des Abschnitts. Und die Oberfläche der darein beschriebenen Figur ist kleiner als die Oberfläche des Abschnitts (Saz XXXIX.). Folglich ist auch die Oberfläche der darum beschriebenen Figur kleiner als der Kreis *F*; welches unmöglich ist, denn sie ist vermöge des oben bewiesenen (Saz XLIV.) grösser als dieser Kreis. Demnach ist die O-

berfläche des Kugelabschnitts nicht kleiner als der Kreis; aber auch nicht grösser, wie bewiesen worden ist. Sie ist ihm also gleich.

Saz IL. Fig. 39.

Ebenfalls ist die Oberfläche eines Abschnitts, welcher grösser als die Halbkugel ist, einem Kreise gleich, dessen Halbmesser der von dem Scheitel an die Peripherie des Kreises, welcher des Abschnitts Grundfläche ist, gezogenen geraden Linie gleich ist.

Denn es sey eine Kugel und in derselben ein gröster Kreis, und man gedenke sich dieselbe von einer auf diesem senkrechten durch *AD* gehenden Ebene geschnitten, und der Abschnitt *ABD* sey kleiner als die Halbkugel. Der Durchmesser *BC* stehe auf *AD* senkrecht; und man ziehe *BA*, *CA*. Nun sey *E* ein Kreis, dessen Halbmesser der *AB*, *F* ein Kreis, dessen Halbmesser der *AC*, und *G* ein Kreis, dessen Halbmesser der *CB* gleich ist. So ist der Kreis *G* den beyden *E* und *F* gleich (E. XII, 2. V, 24. I, 47.). Der Kreis *G* aber ist der ganzen Kugeloberfläche, welche nämlich das Vierfache vom Kreis um den Durchmesser *BC* ist (Saz XXXV.), und der Kreis *E* der Oberfläche des Abschnitts *ABD* gleich, welches vom Abschnitt, der kleiner als die Halbkugel ist, bewiesen worden ist (Saz XLVIII.). Folglich ist der übrige Kreis *F* der Oberfläche des Abschnitts *ACD* gleich, welcher grösser ist als die Halbkugel *).

*) Folgerungen. Fig. 63.

1. Die krumme Oberfläche eines Kugelabschnitts $\left\{\begin{matrix} ABD \\ ACD \end{matrix}\right\}$ ist der krummen Oberfläche des Cylinders $\left\{\begin{matrix} FH \\ FK \end{matrix}\right\}$ gleich, dessen Durchmesser der Grundfläche (*FG*) dem Durchmesser der Kugel gleich ist und der mit dem Abschnitt einerley Höhe $\left\{\begin{matrix} BE \\ EC \end{matrix}\right\}$ hat.

Denn $\left(\begin{matrix} BAq=CBE=HGF \\ CAq=BCE=KGF \end{matrix}\right)$ (E. VI, 8. 17.). Und $\left(\begin{matrix} BAq \\ CAq \end{matrix}\right)$ ist das Quadrat vom Halbmesser des Kreises, welcher der krummen Oberfläche des Abschnitts, $\left(\begin{matrix} HGF \\ KGF \end{matrix}\right)$ dem Quadrat vom Halbmesser des Kreises gleich, wel-

Saz L. Fig. 40.

Iedem Kugelausschnitt ist ein Kegel gleich, dessen Oberfläche der Oberfläche des im Ausschnitt befindlichen Kugelabschnitts und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Es sey eine Kugel und in derselben ein gröster Kreis *ABD*, *C* ihr Mittelpunkt; und ein Kegel, welcher einen

---

cher der krummen Oberfläche des genannten Cylinders gleich ist (Saz XIV. E. VI, 17.). Mithin sind diese Kreise gleich; und die genannten Oberflächen gleich.

2. Die sphärischen Oberflächen von Abschnitten (*BAD*, *CAD*, *BLM*) der nämlichen oder gleicher Kugeln verhalten sich zu einander und zur Oberfläche der Kugel wie die Höhen der Abschnitte (*BE*, *CE*, *BN*) zu einander und zum Durchmesser der Kugel (*BC*).

Denn so verhalten sich die ihnen gleichen (Folg. I. Saz XXXVII. Folger. 4.) cylindrischen Oberflächen (Saz XIV. Folg. 1.).

3. Die sphärischen Oberflächen von Abschnitten ungleicher Kugeln aber sind im zusammengesezten Verhältnis ihrer Höhen und der Durchmesser ihrer Kugeln, und wenn sie ähnlich sind, im duplicirten Verhältnis dieser Durchmesser.

Denn dis Verhältnis haben die cylindrischen Oberflächen, denen sie gleich sind (Saz XIV. Folg. 3. 4.).

4. Die sphärischen Oberflächen zwischen parallelen Kreisen eingeschlossener Kugelstüke oder *Zonen* (*ALMD*) sind den krummen Oberflächen von Cylindern (*GO*) gleich, die dem grösten Kreise der Kugel gleiche Grundflächen und einerley Höhen (*EN*) mit den Zonen haben.

Denn die Oberfläche des Abschnitts BLM ist der cylindrischen HO, die des Abschnitts BAD der cylindrischen HF gleich (Folg. X.); folglich ist auch die übrigbleibende Oberfläche der Zone ALMD der übrigbleibenden cylindrischen GO gleich.

5. Und verhalten sich daher, wenn sie von einerley oder gleichen Kugeln sind, wie ihre Höhen (Saz XIV. Folg. 1.).

6. Wenn sie aber von ungleichen Kugeln sind, so sind sie im zusammengesezten Verhältnis der Durchmesser dieser Kugeln und ihrer Höhen (Saz XIV. Folg. 3.).

der durch den Bogen *ABD* gehenden Oberfläche gleichen Kreis zur Grundfläche habe, und dessen Höhe der *BC* gleich sey. Es ist zu beweisen, dass der Ausschnitt *ABCD* dem genannten Kegel gleich sey.

Wenn dis nicht ist, so sey der Ausschnitt grösser als der Kegel, und man seze, *H* sey dieser Kegel. Da nun zwo ungleiche Grössen sind, der Ausschnitt und der Kegel *H*, so finde man zwo Linien *D*, *E*, von welchen *D* die grössere sey und zu der *E* ein kleineres Verhältnis habe als der Ausschnitt zum Kegel (Saz III.). Man nehme zwo gerade Linien *F*, *G*, so dass die Ueberschüsse der *D* über *F*, der *F* über *G*, und der *G* über *E* einander gleich seyen (wie bey S. XXXVI.); und beschreibe um den ebenen Kreisausschnitt ein gleichseitiges Vielek von einer geraden Anzal Winkel und ein diesem ähnliches darein, so dass die Seite des darum beschriebenen Vieleks zur Seite des darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als *D* zu *F* habe (S. VI.). Ferner seyen wieder wie im vorigen durch Umdrehung des Kreises zwo von Kegeloberflächen eingeschlossene Figuren erzeugt. Nun hat die darum beschriebene Figur nebst dem Kegel, der den Punkt *C* zur Spize hat, zur darein beschriebenen nebst dem Kegel das triplicirte Verhältnis von dem, welches die Seite des umbeschriebenen Vieleks zur Seite des einbeschriebenen hat (Saz XLVII.). Aber die Seite des umbeschriebenen Vieleks hat zur Seite des einbeschriehenen ein kleineres Verhältnis als *D* zu *F*. Folglich wird die erste der genannten Figuren zur zweyten ein kleineres Verhältnis haben als das triplicirte von dem der *D* zu *F*. Und das Verhältnis der *D* zu *E* ist grösser als das triplicirte von dem der *D* zu *F* (E. V, 25 Cor.). Folglich hat die um den Ausschnitt beschriebene körperliche Figur zu der darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als *D* zu *E*. Aber *D* zu *E* hat ein kleineres als der körperliche Ausschnitt zum Kegel *H*. Folglich hat die um den Ausschnitt beschriebene Figur zu der darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als der körperliche Ausschnitt zum Kegel *H*; und *verwechselt* Die darum beschriebene körperliche Figur ist aber grösser als der Ausschnitt; folglich auch die in den Ausschnitt beschriebene grösser als der Kegel *H*: welches unmöglich ist; denn oben (Saz XLI.) ist gezeigt worden, dass sie kleiner sey als ein solcher Kegel, welcher einen Kreis, dessen Halbmesser der von der Spize des Abschnittts an

die Peripherie des Kreises, der des Abschnitts Grundfläche ist, gezogenen geraden Linie gleich ist, zur Grundfläche, den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat: und ein solcher ist der Kegel *H*; denn er hat zur Grundfläche einen Kreis, der der Oberfläche des Abschnitts, d. i. dem genannten Kreise (Saz XLVIII) gleich ist, und seine Höhe ist dem Halbmesser der Kugel gleich. Der körperliche Ausschnitt ist also nicht grösser als der Kegel *H*.

Es sey hingegen der Kegel *H* grösser als der körperliche Ausschnitt. Nun habe wiederum die *D*, welche grösser sey als *E*, zu *E* ein kleineres Verhältnis als der Kegel zum Ausschnitt. Man nehme *F*, *G* wie vorhin; ferner habe die Seite des um den Ausschnitt beschriebenen Vieleks zu der des darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als *D* zu *F*; und man lasse die körperliche Figuren um den körperlichen Ausschnitt entstehen. Man wird sodenn ebenfalls zeigen, dass die um den körperlichen Ausschnitt beschriebene Figur zu der darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis habe als *D* zu *E*, mithin als dasjenige, welches der Kegel *H* zum Ausschnitt hat. Daher hat auch der Ausschnitt zum Kegel ein kleineres als die in den Ausschnitt beschriebene Figur zu der darum beschriebenen. Nun ist der Ausschnitt grösser als die in ihn beschriebene Figur. Folglich ist der Kegel *H* grösser als die darum beschriebene: welches unmöglich ist; denn es ist bewiesen worden, (Saz XLVI), dass ein solcher Kegel kleiner sey als die um den Ausschnitt beschriebene Figur. Der Ausschnitt ist also dem Kegel gleich *).

*) Anmerkung. Fig. 64.

Der nach Hinwegnehmung des körperlichen Ausschnitts (*ACDB*) von der Kugel übrigbleibende Rest (*ACDF*) ist ebenfalls einem Kegel (*K*) gleich, dessen Grundfläche seiner sphärischen Oberfläche (*AFD*) und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Denn man nehme den Kegel *H* wie vorhin; und einen Kegel *L*, dessen Grundfläche der Oberfläche der ganzen Kugel und dessen Höhe ebenfalls dem Halbmesser der Kugel gleich sey. Da nun die ganze Oberfläche der Kugel aus den beyden sphärischen *ABD*, *AFD* besteht, so ist die Grundfläche des Kegels *L* den Grundflächen der Kegel *H*, *K*, und da die Kegel gleiche Höhe haben, der Kegel

L den Kegeln *H*, *K* zusammen gleich (Lehns. 1. E. V, 24.). Von diesen ist aber der Kegel *L* der ganzen Kugel (Saz XXXVI), der Kegel *H* dem Ausschnitt *ACDB* gleich (Saz L.). Folglich ist der übrige Kegel *K* dem übrigbleibenden genannten Reste *ACDF* gleich.

Diesen Beweis gibt Eutocius in seiner Anmerkung zum dritten Saz des IIten Buchs, bey welchem Archimed den eben genannten Rest auch einen körperlichen Ausschnitt nennt, obgleich nach Eutocius Bemerkung die 5te Erklärung des I. B. zunächst nicht auf denselben passt. Von beyderley Ausschnitten, dem kleinern und grössern, gelten folgende

Folgerungen.

1. Jeder Kugelausschnitt (*ACDB*) ist einem Kegel gleich, welcher einen Kreis, dessen Halbmesser der vom Scheitel seiner sphärischen Oberfläche an die Peripherie des sie begrenzenden Kreises gezogenen geraden Linie (*AB*) gleich ist, zur Grundfläche und den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat (Saz III. II. L. Anm.).

2. Ausschnitte der nämlichen oder gleicher Kugeln verhalten sich zu einander und zur Kugel wie ihre sphärischen Oberflächen zu einander und zur Oberfläche der Kugel:

   Denn die ihnen gleichen Kegel (Saz L. XXXVI) verhalten sich wie ihre Grundflächen, da sie gleiche Höhen haben (Lehns. 1.).

   Oder wie die Höhen ihrer sphärischen Oberflächen zu einander und zum Durchmesser der Kugel (Saz II. Folg. 2.).

3. Ausschnitte ungleicher Kugeln aber sind im zusammengesezten Verhältnis ihrer sphärischen Oberflächen und der Halbmesser ihrer Kugeln:

   Denn dis Verhältnis haben die ihnen gleichen Kegel; sie sind nämlich im zusammengesezten Verhältnis ihrer Grundflächen und Höhen (E. XII, 11. 14. Cor.)

Oder im zusammengesezten Verhältnis der Höhen ihrer sphärischen Oberflächen und der Durchmesser ihrer Kugeln; und wenn sie ähnlich sind, im triplicirten Verhältnis der Halbmesser oder Durchmesser ihrer Kugeln (Saz IL. Folg. 3.).

4. Der Cylinder, welcher einerley Höhe mit der sphärischen Oberfläche eines Kugelausschnitts hat und dessen Durchmesser der Grundfläche dem Durchmesser der Kugel gleich ist, ist anderthalbmal so gros als der Kugelausschnitt.

Es sey GM ein Cylinder, der GN=BF zum Durchmesser der Grundfläche und BE zur Höhe habe, welches auch die Höhe der sphärischen Oberfläche des Ausschnitts ACDB sey. Der Cylinder GM ist anderthalbmal so gros als der Ausschnitt ACDB.

Da FB : BA = BA : BE, mithin CB : BA = $\frac{1}{2}$ BA : BE = BA · EO, indem man EO = BE nimmt; so ist CB : EO = CBq : BAq = Kreis um den Durchmesser GN : Kreis, dessen Halbmesser BA. Mithin der Kegel, der den Kreis, dessen Halbmesser BA, zur Grundfläche und eine Höhe = CB hat, d. i. der Ausschnitt ACDB (Folg. 1.) dem Kegel gleich, der den Kreis um GN zur Grundfläche, O zur Spize hat (Lehns. 4.) und das Doppelte vom Kegel, der die nämliche Grundfläche und B zur Spize hat (Lehns. 1.). Von diesem Kegel aber ist der Cylinder GM das Dreyfache (E. XII, 10.). Folglich der Cylinder GM anderthalbmal so gros als der Ausschnitt ACDB.

Archimeds zweytes Buch über Kugel und Cylinder.

ARCHIMED grüsst den DOSITHEUS.

Du hast schon vormals von mir verlangt, dass ich die Beweise von denen Aufgaben ausführen sollte, deren Innhalt ich dem Konon geschikt habe. Nun trift es sich, dass die meisten derselben vermittelst der Lehrsäze ausgeführt werden, von welchen ich dir die Beweise geschikt habe: dass nämlich die Oberfläche jeder Kugel das Vierfache ihres grösten Kreises sey; dass der Oberfläche jedes Kugelabschnitts ein Kreis gleich sey, dessen Halbmesser der vom Scheitel des Abschnitts an die Peripherie seiner Grundfläche gezogenen geraden Linie gleich ist; dass der Cylinder, dessen Grundfläche der gröste Kreis einer Kugel und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist, so wohl selbst anderthalbmal so gros als die Kugel, als auch seine Oberfläche anderthalbmal so gros als die Oberfläche der Kugel sey; dass ferner jeder körperliche Ausschnitt einem Kegel gleich sey, dessen Grundfläche der Oberfläche des Kugelabschnitts im Ausschnitt und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist. Diejenigen Lehrsäze und Aufgaben nun, welche vermittelst der eben angeführten Lehrsäze ausgeführt werden, schike ich dir in diesem Buche ausgeführt; diejenige aber, welche vermittelst einer Speculation anderer Art gefunden werden und die Spirallinien und Konoi-

den betreffen, will ich dir bald zu überschiken suchen.

Die erste Aufgabe war folgende:

Saz I.

Wenn eine Kugel gegeben ist, den ebenen Raum zu finden, der ihrer Oberfläche gleich sey.

Dieser ergibt sich offenbar aus den vorhin gedachten Lehrsäzen. Denn das Vierfache des grösten Kreises ist ein ebener Raum, der der Oberfläche der Kugel gleich ist (B. I. S. XXXV.)

Die zweyte war:

Saz II. Fig. 41.

Wenn ein Kegel oder Cylinder gegeben ist, eine Kugel zu finden, die dem Kegel oder Cylinder gleich sey.

Es sey der gegebene Kegel oder Cylinder A, und demselben die Kugel B gleich. Man seze einen Cylinder CFD, der anderthalbmal so gros sey als der Kegel oder Cylinder A, und einen Cylinder, der anderthalbmal so gros sey als die Kugel B, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser GH und dessen Axe KL dem Durchmesser der Kugel B gleich sey. So ist der Cylinder E dem Cylinder K gleich. Wenn aber Cylinder gleich sind, so verhalten sich ihre Grundflächen umgekehrt wie ihre Höhen (E. XII, 15.); mithin Kreis E: Kreis K, das ist, $CD^q : GH^q = KL : EF$. Nun ist $KL = GH$; denn der Cylinder, der anderthalbmal so gros als die Kugel ist, hat eine dem Durchmesser der Kugel gleiche Axe, und K ist ein gröster Kreis der Kugel (B. I. S. XXXVII.). Folglich $CD^q : GH^q = GH : EF$. Es sey GH^q = Rechtek $CD \times MN$.

So ist $CD : MN = CD^q : GH^q = GH : EF$

und *verwechselt* $CD : GH = GH : MN = MN : EF$.

Und CD, EF sind beyde gegeben. Folglich sind GH, MN zwo mittlere Proportionallinien zwischen zwo gegebenen. Daher sind GH, MN beyde gegeben.

Composition.

Es sey *A* der gegebene Kegel oder Cylinder. Man soll eine dem Kegel oder Cylinder *A* gleiche Kugel finden.

Es sey der Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser *CD* und dessen Axe *EF* ist, anderthalbmal so gros als der Kegel oder Cylinder *A*. Man nehme zwischen *CD*, *EF* zwo mittlere Proportionallinien *GH*, *MN*, so dass $CD : GH = GH : MN = MN : EF$, und gedenke einen Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser *GH* und dessen Axe *KL* dem Durchmesser *GH* gleich sey. Ich behaupte, dass der Cylinder *E* dem Cylinder *K* gleich sey.

Denn da $CD : GH = MN : EF$ und *verwechselt*, und $GH = KL$; so ist $CD : MN$ d. i. $CD^q : GH^q$ d. i. Kreis *E* : Kreis $K = KL : EF$. Die Grundflächen der Cylinder *E*, K verhalten sich also umgekehrt wie ihre Höhen, und daher sind diese Cylinder gleich. Der Cylinder *K* aber ist anderthalbmal so gros als die Kugel, deren Durchmesser *GH* ist (und der Cylinder *E* anderthalbmal so gros als der Kegel oder Cylinder *A*). Folglich ist die Kugel, deren Durchmesser *GH* ist, d. i. *B* dem Kegel oder Cylinder *A* gleich.

Anmerkung.

Die Aufgabe, zwo mittlere Proportionallinien zwischen zwo gegebenen zu finden, *auf welche Archimed die des vorhergehenden Sazes zurükführt, ist eine von denen, deren Construction blos vermittelst der Postulate der Elementargeometrie nicht bewerkstelligt werden kann. Von den mehrerley Arten der Alten, dieselbe durch mechanische Mittel, durch die Durchschnitte krummer Linien u. s. w. zu construiren, von welchen Eutocius eine ausfürliche Sammlung aufbehalten hat, die übrigens nach seiner eigenen Bemerkung in Absicht auf die Analyse nicht alle von einander verschieden sind, deren auch einige bey Pappus* (Collect. Math. L. III, prop. 5. L. IV, pr. 24) *stehen, mag hier eine, die von Menechmus, angeführt werden, welcher die Aufgabe durch den Durchschnitt zweyer Kegelschnitte auflöst.*

„Es seyen (*Fig. 52.*) *D*, *E* die gegebenen zwo ge„raden Linien; man soll zwischen *D*, *E* zwo mittlere Pro„portionallinien finden.

„Es sey geschehen und es seyen dieselbe *B*, *C*. Es „sey *AG* eine der Lage nach angenommene in *A* begrenzte „gerade Linie, und $AF = C$, man ziehe *FH* senkrecht und „nehme sie $= B$. Da nun *D*, *B*, *C* drey proportionirte „gerade Linien sind, so ist $D \times C = B^q$, mithin das Rech„ek aus der gegebenen *D* und der *C*, d. i. $AF = B^q$ d. i. „FH^q, Folglich liegt der Punkt *H* in einer Parabel, die „durch *A* geht. Man ziehe die Parallelen *HK*, *AK*. Da „nun $B \times C$ gegeben, nämlich $= D \times E$ ist, so ist auch „*KHF* gegeben; und der Punkt *H* ligt daher in einer Hy„perbel, die *KA*, *AF* zu Asymptoten hat. Folglich ist „der Punkt *H*, und daher auch *F* gegeben.

„*Composition.* Man nehme die in *A* begrenzte *AG* „der Lage nach an, und beschreibe durch den Punkt *A* ei„ne Parabel, deren Axe *AG* und deren Parameter *D* sey; „so dass die Quadrate der rechtwinklichen Applicaten auf „*AG* den Rechteken aus *D* und den Abscissen vom „Punkt *A* an gleich seyen. Sie sey beschrieben und *AH* „sey dieselbe; und *AK* in *A* senkrecht. Man beschreibe „alsdenn zwischen den Asymptoten *KA*, *AF* eine Hy„perbel, so dass die an *KA*, *AG* gezogenen Applicaten „ein Rechtek $= D \times E$ einschliessen. Diese wird die Pa„rabel schneiden. Dis geschehe in *H*, und man fälle die „die Lothe *HK*, *HF*.

„Da nun $FH^q = D \times FA$, so ist $D : FH = FH : FA$. „Und da $D \times E = HFA$, so ist $D : FH = FA : E$. Folg„lich $D : FH = FH : FA = FA : E$, und wenn $B = FH$, „$C = FA$ genommen wird, $D : B = B : C = C : E$, das ist, „*D*, *B*, *C*, *E* sind stetig proportionirt. Welches zu fin„den war.

„*Anders* (Fig. 53.) Es seyen die zwo gegebenen geraden „Linien *AB*, *BC* auf einander senkrecht; und *DB*, *BE* „seyen die mittleren Proportionallinien zwischen denselben, „so dass $CB : BD = BD : BE = BE : BA$. Man ziehe die „*DF*, *EF* senkrecht. Da nun $CB : BD = BD : BE$, so „ist *CBE*, das ist das Rechtek aus einer gegebenen und „$BE = BD^q$ d. i. EF^q, und mithin berührt der Punkt „*F* eine gegebene Parabel, die *BE* zur Axe hat. Wieder-

„um da $AB : BE = BE : BD$, so ist ABD d. i. das „Rechtek aus einer gegebenen und $BD = EB^q$ d. i. DF^q, „und der Punkt F berührt auch eine Parabel um die Axe „BE. Folglich ist der Punkt F gegeben; und die FD, „FE sind senkrecht; die Punkte D, E sind also auch „gegeben.

„*Compositio.* Es seyen AB, BE die beyden gege„benen geraden Linien auf einander senkrecht, und über „B nach D, E verlängert. Man beschreibe um die Axe „BE eine Parabel, so dass die Quadrate der Applicaten „den Rechteken aus den Abscissen und BC, und eine an„dere um die Axe DB, so dass die Quadrate der Applica„ten den Rechteken aus den Abscissen und AB gleich „seyen. Diese Parabeln schneiden einander. Dis geschie„he in F; man ziehe die FD, FE senkrecht.

„Da FE eine Applicate der Parabel und ihr DB „gleich ist, so ist $CBE = BD^q$. Folglich $CB : BD = BD : BE$. Wiederum da FD eine Applicate der Parabel „und ihr EB gleich ist, so ist $DBA = EB^q$; folglich „$DB : BE = BE : BA$. Mithin $CB : BD = BD : BE = BE : BA$. Welches zu finden war.

Diese beyden Auflösungen kommen unter allen von Eutocius vorgetragenen denjenigen am nächsten, die in neuern Zeiten von Descartes, im IIIten Buch seiner Geometrie, von Fermat (Varia opp. math. Tolosae 1679. Append. ad Isagog. Top.) und *Slusius* (Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum & infinitas hyperbolas vel ellipses & per quamlibet exhibitae. Leodii 1659. 1668.) *gegeben worden sind, welche mehrere Constructionen vermittelst des Durchschnitts eines Kreises mit einem Kegelschnitt angeben. Dass ausser diesen Vieta* (Opp. *im* Supplem. Geometriae, Pseudomesolab. *und andern Stellen*), *Huygens* (Opp. Var. Vol. II. p. 393. Illustrium quorundam probl. constr. Probl. III.), *Newton* (Arithm. univers. Append. Aequationum constructio linearis) *mehrere andere Auflösungen geben, sey hier blos zu erwähnen genug.*

Satz III. Fig. 42.

Jedem Kugelabschnitt ist ein Kegel gleich, der mit dem Kugelabschnitt einerley Grundfläche

und zur Höhe eine gerade Linie hat, die sich zur Höhe des Abschnitts verhält wie der Halbmesser der Kugel und die Höhe des übrigen Abschnitts zusammen zur Höhe des übrigen Abschnitts.

Es sey eine Kugel, und in derselben ein gröster Kreis, dessen Durchmesser AC sey. Die Kugel werde von einer durch BF gehenden auf der AC senkrecht stehenden Ebene geschnitten, und H sey ihr Mittelpunkt. Nun sey $HA+AE : AE = DE : CE$ und $HC+CE : CE = KE : AE$ gemacht, und auf dem Kreis um den Durchmesser BF seyen Kegel beschrieben, welche die Punkte D, K zu Spizen haben. Ich behaupte, dass der Kegel BDF dem Kugelabschnitt bey C und der Kegel BKF dem bey A gleich sey.

Denn man ziehe BH, HF, und gedenke einen Kegel, der den Kreis um den Durchmesser BF zur Grundfläche und den Punkt H zur Spize habe. Und es sey ein Kegel M, der einen der Oberfläche des Kugelabschnits BCF, gleichen Kreis, das ist, dessen Halbmesser $= BC$ sey (S. I. S. XLVIII.), zur Grundfläche und eine dem Halbmesser der Kugel gleiche Höhe habe: so ist der Kegel M dem körperlichen Ausschnit $BCFH$ gleich, wie im ersten Buch (Saz L.) gezeigt worden ist. Da nun

$$DE : EC = HA + AE : AE;$$

so ist *getrennt* $DC : CE = HA : AE$
und *verwechselt* $DC : CH = CE : EA$ (da $CH = HA$)
und *verb.* $DH : HC = CA : AE = CB^q : BE^q$ (E. VI, 9. 20)
Es ist aber $CB =$ dem Halbmesser des Kreises M, BE der Halbmesser des Kreises um den Durchmesser BF. Mithin $DH : HC =$ Kreis M : Kreis um den Durchmesser BF (E. XII, 2 Cor.). Und $HC =$ der Axe des Kegels M. Folglich DH : Axe des Kegels $M =$ Kreis M : Kreis um den Durchmesser BF. Daher der Kegel $M =$ dem Kegel, der den Kreis um den Durchmesser BF zur Grundfläche, DH zur Höhe hat (B. I. Lehns. 4.) = dem körperlichen Rhombus $BDHF$ (Bew. des XIX. S. B. I.). Nun ist der Kegel $M =$ dem körperlichen Ausschnitt $BCFH$. Folglich der körperliche Ausschnitt $BCFH =$ dem körperlichen Rhombus $BDFH$. Wenn man also den gemeinschaftlichen Kegel hinwegnimmt, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser BF und dessen Höhe EH ist; so ist der übrigbleibende BDF dem Kugelabschnitt BFC gleich.

Ebenso wird bewiesen werden, dass der Kegel *BKF* dem Kugelabschnitt *BAF* gleich sey. Denn da

$$HC + CE : CE = KE : EA$$

so ist *getrennt* $HC : CE = KA : AE$

und *verwechselt* $KA : AH = AE : EC$, da $HA = HC$,

und *verb.* $KH : HA = AC : CE = BA^q : BE^q$ (E. VI, 8. 20)

Nun sey wieder *N* ein Kreis, dessen Halbmesser der *AB* gleich sey; so ist derselbe der Oberfläche des Abschnitts *BAF* gleich, wie im ersten Buch (S. IL) bewiesen worden. Und man gedenke den Kegel *N*, dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich sey; so ist dieser dem körperlichen Ausschnitt *BHFA* gleich (B. I. S. L. *Anm.*). Da nun vermöge des bewiesenen $KH : HA = AB^q : BE^q$, d. i. = Quadrat des Halbmessers des Kreises *N*: Quadrat des Halbmessers des Kreises um den Durchmesser *BF*, d. i. = Kreis *N*: Kreis um den Durchmesser *BF*, die *AH* aber der Höhe des Kegels *N* gleich ist; so ist *KH* : Höhe des Kegels *N* = Kreis *N* : Kreis um den Durchmesser *BF*. Folglich ist der Kegel *N*, das ist, der Ausschnitt *BHFA* der Figur *BHFK* gleich *). Man füge den gemeinschaftlichen Kegel hinzu, dessen Grundfläche der Kreis um *BF* und dessen Höhe *EH* ist. So ist der ganze Kugelabschnitt *ABF* dem Kegel *BFK* gleich: welches zu erweisen war.

Und es ist offenbar: dass allgemein ein Kugelabschnitt zu einem Kegel, der mit dem Abschnitt einerley Grundfläche und gleiche Höhe hat, sich verhält wie der Halbmesser der Kugel und das Loth des übrigen Abschnitts zusammen zum Loth des übrigen Abschnitts **). Denn wie *DE* zu *EC*, so ver-

*) Der Kegel N ist = dem Kegel, dessen Grundfläche der Kreis um BF, Höhe KH (B. I, Lehns. 4.). Dieser Kegel aber nebst dem, der die nämliche Grundfläche und EH zur Höhe hat, ist = dem Kegel BKF (Lehns. I. E. V, 24). Man nehme den gemeinschaftlichen Kegel hinweg, der den Kreis um BF zur Grundfläche, EH zur Höhe hat. So ist der übrigbleibende Kegel, welcher = N, = der Figur BHFK. E u t.

**) Oder wie der Ueberschuss von dreymal dem Halbmesser der Kugel über die Höhe des Abschnitts zum Ueberschuss von zweymal dem Halbmesser der Kugel über die Höhe des Abschnitts. (Denn $HA + AE = 3HA - CE$, $AE = 2HA - CE$. Ebenso $HC + CE = 3HC - AE$, $CE = 2HC - AE$).

hält sich der Kegel BDF, das ist, der Ausschnitt BCF zum Kegel BCF (B. 1, Lehns. 1.).

Dass der Kegel KBF dem Kugelabschnitt ABF gleich sey, lässt sich unter den nämlichen Voraussezungen noch so beweisen. Es sey ein Kegel N, dessen Grundfläche der Oberfläche der Kugel und dessen Höhe ihrem Halbmesser gleich sey; so ist dieser der Kugel gleich; denn es ist bewiesen worden (Saz XXXVI, B. I.), dass die Kugel das Vierfache eines Kegels sey, der zur Grundfläche ihren grösten Kreis, und zur Höhe den Halbmesser der Kugel hat: aber auch der Kegel N ist das Vierfache vom nämlichen, weil seine Grundfläche von der Grundfläche des leztern, nämlich die Oberfläche der Kugel von ihrem grösten Kreise das Vierfache ist.

Da nun $HA + AE : AE = DE : EC$,
so ist *getr.* u. *verw.* $HC : CD = AE : EC$.
Wiederum weil $KE : EA = HC + CE : CE$,
so ist *getr.* u. *verw.* $KA : \left\{\begin{matrix} HC \\ AH \end{matrix}\right\} = AE : EC$ d. i. $HC : CD$,
und *verbunden* $KH : \left\{\begin{matrix} HC \\ AH \end{matrix}\right\} = HD : DC$
u. (E. V, 12) d. ganze $KD : DH = HD : DC = KH : HA$,
folglich (E. VI, 16.) Rechtek DHK = Rechtek $KD \times HA$.
Auch ist, da $KH : HC = HD : DC$, *verw.* $KH : HD = HC : CD$,
vermöge des bewiesenen aber $HC : CD = AE : EC$;
folglich $KH : HD = AE : EC$,
und daher *) $KD^q : KHD = AC^q : AEC$,
u. weil $DHK = KD \times HA$, $\left\{\begin{matrix} KD^q \\ KD \end{matrix}\right. : \left.\begin{matrix} KD \times HA \\ AH \end{matrix}\right\} = AC^q : \left\{\begin{matrix} AEC \\ EB^q \end{matrix}\right\}$,

Nun ist AC dem Halbmesser des Kreises N gleich; Folglich das Quadrat des Halbmessers des Kreises $N : RE^q$, das ist, Kreis N: Kreis um den Durchmesser $BF = KD$:

Oder wie das Quadrat der Höhe des Abschnitts und dreymal das Quadrat des Halbmessers seiner Grundfläche zusammen zu zweymal dem Quadrat des Halbmessers seiner Grundfläche. Denn da, wie oben gezeigt wurde, $CA : AE = CBq : BEq$, so ist $HA : AE = \frac{1}{2} CBq : BEq = CBq : 2BEq$, und verbunden $HA + AE : AE = CBq + 2BEq : 2BEq = CEq + 3BEq : 2BEq$. Ebenso ist $HC + CE : CE = AEq + 3BEq : 2BEq$.

*) Verbunden $KD : DH = AC : EC$, u. $KDq : DHq = ACq : ECq$ (E. VI, 22); umgekehrt $DH : KH = EC : AE$, u. $DHq : KHD = ECq : AEC$ (E. VI, 1), daher gleichförmig $KDq : KHD = ACq : AEC$. Eut.

HA, d. i. $= KD$: Höhe des Kegels N. Mithin ist der Kegel N dem Kegel gleich, der den Kreis um den Durchmesser BF zur Grundfläche und DK zur Höhe hat (B. I. Lehns. 4.); lezterer Kegel aber ist dem körperlichen Rhombus $BKFD$ gleich. Folglich ist auch der Kegel N, das ist, die Kugel, dem aus den zweyen Kegeln BDF, BKF bestehenden körperlichen Rhombus $BKFD$ gleich, von welchen der Kegel BDF dem Kugelabschnitt BCF gleich bewiesen worden ist. Folglich ist der übrigbleibende BKF dem Kugelabschnitt BAF gleich *).

Eine dritte Aufgabe war:

Saz IV. Fig. 43.

Eine gegebene Kugel durch eine Ebene so zu schneiden, dass die Oberflächen der Abschnitte ein gegebenes Verhältnis zu einander haben.

Es sey geschehen. $ADBE$ sey ein gröster Kreis der Kugel, und dessen Durchmesser AB. Durch die AB gehe eine auf ihr senkrechte Ebene, und mache im Kreis $ADBE$ den Durchschnitt DE. Man ziehe AD, BD.

Da nun das Verhältnis der Oberfläche des Abschnitts DAE zur Oberfläche des Abschnitts DBE gegeben ist, der Oberfläche des DAE aber ein Kreis, dessen Halbmesser $= AD$, der Oberfläche des Abschnitts DBE ein Kreis, dessen Halbmesser $= BD$, gleich ist (B. I, S. IIL, IL.); aber wie die gedachten Kreise, so das Quadrat von AD zum Quadrat von DB, das ist, AC zu CB (E. VI, 8. 20.) sich verhält; so ist demnach das Verhältnis von AC zu CB gegeben. Folglich ist der Punkt C gegeben. Und DE steht auf AB senkrecht. Folglich ist die Ebene durch DE der Lage nach gegeben.

---

*) Der Kugelabschnitt $\left\{\begin{matrix} BAF \\ BCF \end{matrix}\right\}$ ist auch einem Kegel gleich, von dessen Grundfläche der Halbmesser der Höhe des Abschnitts $\left\{\begin{matrix} AE \\ CE \end{matrix}\right\}$ und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel und der Höhe des übrigen Abschnitts $\left\{\begin{matrix} HC + CE \\ HA + AE \end{matrix}\right\}$ zusammen gleich ist. Man sehe in der Anmerkung zum Vten Saz Dionysodors Auflösung am Ende.

Composition.

Es sey eine Kugel, deren gröster Kreis $ADBC$ und dessen Durchmesser AB. Das gegebene Verhältnis sey das von F zu G. Man theile AB in C, so dass $AC:CB = F:G$; durch C werde die Kugel von einer Ebene geschnitten, die auf AB senkrecht sey (E. XII, 11, 18), und es sey DE der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Ebene mit dem Kreise. Man ziehe AD, DB.

Nun seze man zwey Kreise H, K, von denen des H Halbmesser $= AD$, der Halbmesser des $K = DB$ sey. So ist der Kreis H der Oberfläche des Abschnitts DAE, der Kreis K der Oberfläche des Abschnitts DBE gleich. Da der Winkel ADB ein rechter und CD senkrecht ist, so ist $AC:CB$, d. i. $F:G = AD^q : DB^q$, das ist = Quadrat des Halbmessers des Kreises H: Quadrat des Halbmessers des Kreises K, das ist = Oberfläche des Abschnitts DAE: Oberfläche des Abschnitts DBE.

Satz V. Fig. 44.

Eine gegebene Kugel so zu theilen, dass die Abschnitte derselben ein gegebenes Verhältnis zu einander haben.

Es sey die Kugel $ABCD$. Man soll sie durch eine Ebene so schneiden, dass die Abschnitte der Kugel ein gegebenes Verhältnis zu einander haben.

Sie sey von einer Ebene durch AC geschnitten: So ist das Verhältnis des Abschnitts ADC zum Abschnitt ABC gegeben. Nun sey die Kugel durch den Mittelpunkt geschnitten, der Durchschnitt der gröste Kreis $ABCD$, der Mittelpunkt K und der Durchmesser DB. Man mache $KD + DX : DX = RX : XB$, und $KB + BX : BX = LX : XD$, und ziehe die AL, LC, AR, RC. So ist der Kegel ALC dem Kugelabschnitt ADC, der ARC dem ABC gleich (B. II. S. III.). Mithin ist das Verhältnis des Kegels ALC zum Kegel ARC gegeben. Aber wie der eine Kegel zum andern, so verhält sich LX zu XR, da sie die nämliche Grundfläche, den Kreis um den Durchmesser AC haben (B. I. Lehns. 1.). Folglich ist das Verhältnis $LX : XR$ gegeben. Und aus den nämlichen Gründen wie vorhin (beym Bew. des III. S.) folgt aus der Construction, dass

$$LD : KD = KB : BR = DX : XB.$$

Da nun $RB : BK = KD : DL$, so ist *verb.* $RK : \begin{Bmatrix} KB \\ KD \end{Bmatrix} = KL : LD$

u. die ganze RL : ganzen $KL = KL : LD$;
daher Rchtk $RLD = KL^q$, u. $RL : LD = KL^q : LD^q$ (E.VI,17.20.)
Und da $LD : DK = DX : XB$, so ist
aeq. u. vb. $KL : LD = BD : DX$, u. $KL^q : LD^q = BD^q : DX^q$ (E.VI,22)

(folgl. $RL : LD = BD^q : DX^q$)

Wiederum weil $LX : XD = KB + BX : BX$,
so ist getrennt $LD : DX = KB : BX$.

Es sey $FB = BK$; denn dass F über R hinausfallen wird, ist offenbar *). Und es wird seyn $LD : DX = FB : BX$, folglich auch $DL : LX = BF : FX$.

Da nun das Verhältnis $RX : XL$ gegeben ist, so ist auch das Verhältnis $RL : LX$ gegeben. Und das Verhältnis $RL : LX$ ist zusammengesezt aus den Verhältnissen $RL : LD$, $DL : LX$, von welchen das $RL : LD = BD^q : DX^q$, das $DL : LX = BF : FX$; folglich ist das Verhältnis $RL : LX$ aus den Verhältnissen $BD^q : DX^q$, $BF : FX$ zusammengesezt **). Man mache $RL : LX = BF : FH$; und da $RL : LX$ gegeben ist, so ist auch $BF : FH$ gegeben; nun ist BF gegeben, denn sie ist dem Halbmesser gleich; folglich auch FH. Und das Verhältnis $BF : FH$ ist zusammengesezt aus den Verhältnissen $BF : FX$, $FX : FH$. Man nehme das gemeinschaftliche Verhältnis $BF : FX$ hinweg, so bleibt übrig BD^q, welches gegeben ist, : $DX^q = XF : FH$ ***), welche leztere auch gegeben ist. Und die gerade Linie DF ist gegeben. Es muss demnach die gegebene DF so geschnitten werden in X, dass wie XF zur gegebenen FH, so das gegebene Quadrat von BD zum Quadrat von DX sich verhalte. Diese Aufgabe so allgemein ausgedrükt hat eine Bestimmung; sie hat sie aber nicht mehr, wenn man die hier vermöge der Analyse statt findenden Bedingungen dazu nimmt, dass nämlich DB das doppelte von BF und BF grösser als FH sey. Und die Aufgabe wird so lauten: Es sind zwo gerade Linien DB, BF gegeben, und DB ist das doppelte von BF, und ein Punkt H auf BF; die BD in X so zu theilen,

*) Weil KB d. i. FB > BR im nämlichen Verhältnis als DX > XB.
**) El. V, prop. G. } in Rob. Simsons Ausgabe.
***) El. V, prop. K. }

dass $BD^q : DX^q = XF : FH$ sey. Diese beyden Aufgaben werden am Ende aufgelöst und componirt werden.

Composition.

Es sey das gegebene Verhältnis $Q : S$ des grössern zum kleinern. Und es sey eine Kugel gegeben, welche von einer Ebene durch den Mittelpunkt geschnitten werde; der Durchschnitt sey der Kreis $ABCD$, der Durchmesser BD, der Mittelpunkt K. Man nehme $BF = BK$, und theile die BF in H so, dass $HF : HB = Q : S$; theile ferner die BD in X so, dass $XF : HF = BD^q : DX^q$, und lege durch X eine auf BD senkrechte Ebene. Ich behaupte, dass diese Ebene die Kugel so schneide, dass der grössere Abschnitt zum kleinern sich verhalte wie Q zu S.

Denn man mache $KB + BX : BX = LX : XD$, und $KD + DX : DX = RX : XB$, und ziehe AL, LC, AR, RC. So wird der Construction zufolge, wie in der Analyse gezeigt worden ist, Rechtek $RLD = LK^q$ und $KL : LD = BD : DX$. Und da $RLD = LK^q$, so ist $RL : LD = LK^q : LD^q$. Folgl. $RL : LD = BD^q : DX^q$ d. i. $= XF : FH$. Und da $KB + BX : BX = LX : XD$, $KB = BF$; so ist $FX : XB = LX : XD$, und *zurükkehrend* $XF : FB = XL : LD$, und $DL : LX = BF : FX$.

Da nun $RL : LD = XF : FH$,
und $DL : LX = BF : FX$;
so ist *gleichförm. u. in zerstreuter Ordn.* $RL : LX = BF : FH$,
und $LX : XR = FH : HB$.
Aber $FH : HB = Q : S$;
folglich $LX : XR$, d. i. Kegel AIC : Kegel ARC, d. i. Kugelabschnitt ADC : Abschnitt $ABC = Q : S$.

Anmerkung.

Da die von Archimed versprochene Analyse und Composition der Hülfsaufgabe, auf welche er die des vorhergehenden Sazes zurükführt, sich in den gewönlichen Abschriften nicht vorfand; so suchte nach Eutocius Erzählung Dionysodor, da er mit der Hülfsaufgabe nicht zu Stande kommen konnte, die Aufgabe des Sazes, ohne jene zu gebrauchen, auf einem andern Wege aufzulösen; und ebendasselbe ver-

suchte Diokles, der dafür hielt, dass Archimed die von ihm versprochene Analyse und Composition niemals wirklich gegeben habe. Nach langem Bemühen aber, erzält Eutocius ferner, sey ihm endlich ein Exemplar in die Hände gerathen, welches eine Ausführung der genannten Hülfsaufgabe, zwar durch Schreib-Fehler sehr verunstaltet, aber in dem dem Archimed gewohnten dorischen Dialekt und mit Gebrauch der ältern Benennungen der Kegelschnitte, nach welchen die Parabel Schnitt eines rechtwinklichen; die Hyperbel Schnitt eines stumpfwinklichen Kegels hiess, verfasst enthalten habe: so dass er auf den Gedanken gekommen scy, Archimed möchte wohl selbst das beym vorhergehenden Saze versprochene ausgeführt haben. Eutocius stellt sodenn den Innhalt jener Stelle dar, wie folgt:

Aufgabe. Fig. 54.

„Es ist eine gerade Linie *AB*, eine andere *AC* „und ein Raum *D* gegeben; auf *AB* einen Punkt „wie *E* so zu nehmen, dass *AE* : *AC* wie der Raum „*D* : EB^q sich verhalte.

„Es sey geschehen. *AC* sey auf *AB* senkrecht; man „ziehe *CE* und verlängere sie nach *F*. Durch den Punkt *C* „ziehe man der *AB* die *CG*, durch *B* der *AC* die *FBG* pa„rallel, welche den *AE*, *CG* begegnet. Man vollende „das Parallelogramm *GH*, ziehe durch *E* den *CH*, *GF* „die *KEL* parallel; und es sey das Rechtek $CGM = D$.

„Da nun $\left\{\begin{matrix} CG : GF \\ CG^q : CGF \end{matrix}\right\} = EA : AC = \left|\begin{matrix} D \\ CGM \end{matrix}\right| : \left\{\begin{matrix} EB^q \\ KF^q \end{matrix}\right\}$; so ist

„verw. $\left\{\begin{matrix} CG^q : CGM \\ CG : GM \\ CGF : MGF \end{matrix}\right\} = CGF : KF^q$, mithin $MGF = KF^q$.

„Wenn demnach um die Axe *FG* durch den Punkt *G* eine „Parabel beschrieben wird, so dass die Quadrate der Ap„plicaten den Rechteken aus den Abscissen und *GM* gleich „seyen, so wird diese durch *K* gehen: und sie wird der „Lage nach gegeben seyn, weil *GM*, welche mit der ge„gebenen *GC* den gegebenen Raum *D* einschliesst, der Grösse „nach gegeben ist. Sie sey beschrieben, *GK* sey dieselbe.

„Da ferner das Rechtek $KL = CB$ (E. I, 44), d. i.

„$HKL = ABG$; so wird eine durch B um die Asympto-
„ten HC, CG beschriebene Hyperbel durch den Punkt K
„gehen und der Lage nach gegeben seyn, weil die beyden
„HC, CG und der Punkt B der Lage nach gegeben sind.
„Sie sey beschrieben, und KB sey dieselbe. So berührt
„demnach der Punkt K eine der Lage nach gegebene Hy-
„perbel. Er berührte aber auch eine der Lage nach gege-
„bene Parabel. Der Punht K ist also gegeben. Und KE
„ist von ihm auf der der Lage nach gegebenen AB senk-
„recht. Folglich ist der Punkt E gegeben.

„Da nun EA zur gegebenen AC wie der gegebene
„Raum D zum Quadrat von EB sich verhält; so sind von
„zwey Körpern, deren Grundflächen das Quadrat von EB
„und der Raum D, und deren Höhen EA, AC sind, die
„Grundflächen und Höhen umgekehrt proportionirt; folg-
„lich die Körper gleich (E. XI. 34.); nämlich das recht-
„winkliche Parallelepipedum $BE^q \times EA$ = dem gegebe-
„nen $D \times AC$. Nun ist aber $BE^q \times EA$ das gröste un-
„ter allen auf ähnliche Art aus AB erhaltenen rechtwinkli-
„chen Parallelepipeden, wenn $BE = 2EA$, wie bewiesen
„werden soll. Es muss also das rechtwinkliche Parallele-
„pipedum aus dem gegebenen Raum und der gegebenen ge-
„raden Linie nicht grösser als $BE^q \times EA$ seyn (indem
„BA so getheilt ist, dass $BE = 2EA$).

Compositio. Fig. 55.

„Es sey die gegebene gerade Linie AB, eine andere
„gegebene AC, und der gegebene Raum D. Man soll AB
„so theilen, dass wie der eine Abschnitt zur gegebenen
„AC so der gegebene Raum D zum Quadrat des andern
„Abschnitts sich verhalte.

„Man nehme $AE = \frac{1}{3}AB$. Nun ist $D \times AC$ entweder
„grösser als $BE^q \times EA$, oder ihm gleich oder kleiner.
„Im Fall, da es grösser ist, ist keine Composition möglich,
„wie in der Analyse gezeigt worden ist. Wenn es ihm
„gleich ist, so thut der Punkt E der Aufgabe Genüge;
„denn Grundflächen und Höhen gleicher Körper sind um-
„gekehrt proportionirt und es ist $EA : AC = D : BE^q$. Ist
„aber $D \times AC < BE^q \times EA$, so wird man so verfahren:

„Es sey AC senkrecht auf AB; durch C ziehe man der
„AB die CF, durch B der AC die BF parallel, die mit der

„verlängerten CE in G zusammentreffe. Man vollende „das Parallelogramm FH; und ziehe durch E der FG die „KEL parallel. Da nun $D \times AC < BE^q \times EA$, so ver„hält sich wie EA zu AC so der Raum D zu einem klei„nern als BE^q, welches $= GK^q$. Es sey $EA : AC = D : GM^q$, und $CFN = D$. Da nun

„$\left\{\begin{matrix} CF : FG \\ CF^q : CFG \end{matrix}\right\} = EA : AC = \left\{\begin{matrix} D \\ CFN \end{matrix}\right\} : GM^q$, so ist *verm.*

„$\left\{\begin{matrix} CF^q : CFN \\ CF : FN \\ CFG : NFG \end{matrix}\right\} = CFG : GM^q$, folglich $NFG = GM^q$.

„Wenn daher durch F um die Axe FG eine Parabel be„schrieben wird, so dass die Quadrate der Applicaten den „Rechteken aus den Abscissen und NF gleich seyen, so „wird dieselbe durch M gehen. Sie sey beschrieben, und „MOF sey dieselbe. Da ferner $HL = AF$ d. i. $HKL = ABF$; so wird eine durch B um die Asymptoten AC, „CF beschriebene Hyperbel durch K gehen. Sie sey be„schrieben, und BOK sey dieselbe und schneide die Para„bel in O. Von O fälle man OPQ auf AB senkrecht, und „ziehe durch O der AB die ROS parallel. Da nun BOK „eine Hyperbel ist, deren Asymptoten HC, CF, und „RO, OQ den AB, BF parallel gezogen sind; so ist „$ROQ = ABF$, und daher $RP = PF$. Folglich, wenn „von C nach S eine gerade Linie gezogen wird, so wird „sie durch P gehen. Sie sey gezogen, und CPS sey die„selbe. Da nun $PA : AC = PB : BS = CF : FS = CFN : SFN$, „und $CFN = D$, u. $SFN = SO^q = BP^q$ wegen der Parabel; „so ist $PA : AC =$ Raum $D : BP^q$, und mithin der „Punkt P gefunden, welcher der Aufgabe Genüge leistet.

„Dass aber, wenn $BE = 2EA$, alsdenn $BE^q \times EA$ „das gröste unter allen auf ähnliche Art aus BA erhaltenen „rechtwinklichen Parallelepipeden sey, wird so bewiesen „werden:

(*Fig.* 56.) „Es sey wiederum, wie in der Analyse, „die gegebene gerade Linie AC auf der AB senkrecht; und „CE gezogen und verlängert treffe mit der durch B der „AC gezogenen Parallele in F zusammen. Durch C, P „seyen HF, CG der AB parallel gezogen, CA nach H „verlängert, und ihr durch E die KEL parallel. Und es „sey $EA : AC = CGM : EB^q$ gemacht; so ist $BE^q \times EA$ „$= CGM \times AC$, weil die Grundflächen und Höhen dieser

„Körper umgekehrt proportionirt sind. Ich behaupte nun, „dass $CGM \times AC$ das gröste unter allen auf ähnliche Art „aus BA erhaltenen rechtwinklichen Parallelepipeden sey.

„Denn man beschreibe durch G um die Axe GF eine „Parabel, so dass die Quadrate der Applicaten den Rechte„ken aus den Abscissen und GM gleich seyen; diese wird „durch K gehen, wie in der Analyse bemerkt worden „ist, und mit der verlängerten HC, welche ihrem Durch„messer parallel ist, zusammentreffen (Apoll. Conic. I, 26); „die geschehe in N. Durch B beschreibe man um die As. „NC, CG eine Hyperbel; diese wird auch durch K gehen, wie „in der Analyse gesagt wurde; sie sey BK. Man nehme „der FG ihre Verlängerung GO gleich, ziehe OK und ver„längere sie nach P. So ist offenbar, dass diese die Para„bel berührt (Apoll. Conic. I, 33 Conv.). Da nun $BE = 2EA$ vermöge der Voraussezung, d. i. $FK = 2KH$, und „das Dreyek PHK dem OFK ähnlich ist; so ist $OK = 2KP$. „Es ist aber auch $OK = 2KQ$, weil $OF = 2FG$ und QG der „KF parallel ist. Folglich $PK = QK$. Da demnach die „PKQ, welche zwischen den Asymptoten der Hyperbel „liegt B und die Parabel berührt, in K halbirt wird; so be„rührt sie die Hyperbel (Ap. Con. II, 3 Conv.). Sie berührte „aber auch die Parabel im nämlichen Punkt K. Folglich be„rührt die Parabel die Hyperbel in K. Man gedenke sich „die Hyperbel verlängert nach R. Man nehme auf AB irgend „einen beliebigen Punkt S, ziehe durch S der KL die TSU „parallel, welche der Hyperbel in T begegne, und durch „T der CG die VTX parallel. Da nun wegen der Hy„perbel und ihrer Asymptoten $VU = CB$, so ist, wenn „man das gemeinschaftliche CS wegnimmt, $VS = SG$, „und daher wird eine von C nach X gezogene gerade Li„nie durch S gehen. Diese sey CSX. Da nun $WX^q = XGM$ wegen der Parabel, so ist $TX^q < XGM$. Es „sey $TX^q = XGy$. Da nun

$$SA : AC = CG : GX = CGy : XGy = CGy : \left\{ \begin{matrix} TX^q \\ BS^q \end{matrix} \right\}$$

„so ist $BS^q \times SA = CGy \times AC < CGM \times AC$.
„Folglich ist $BS^q \times SA < BE^q \times EA$. Eben so wird „man es von allen Punkten beweisen, die zwischen B, E „genommen werden.

„Man nehme nun einen Punkt s zwischen E, A. Ich „behaupte, dass auch $BE^q \times EA > Bs^q \times sA$. Denn „man mache die nämliche Construction wie vorhin, ziehe

„durch s der KL die usR parallel, welche der Hyperbel „in R begegne, welches geschehen muss, weil sie der „Asymptote parallel ist; und durch R der AB die vRx „parallel, welche die verlängerte GF in x treffe. Da nun „wiederum wegen der Hyperbel $vx = AG$, so wird eine „von C nach x gezogene gerade Linie durch s gehen; sie „sey Esx. Und da wiederum wegen der Parabel $Zx^{q} =$ „xGM, so ist $Rx^{q} < xGM$. Es sey $Rx^{q} = xGy$. Da „nun $sA : AC = CG : Gx = CGy : xGy = CGy : \left\{\begin{matrix} Rx^{q} \\ Bs^{q} \end{matrix}\right\}$;

„so ist $Bs^{q} \times sA = CGy \times AC < CGM \times AC$.

„Mithin ist $BE^{q} \times EA > Bs^{q} \times sA$. Und dis wird eben„so für alle Punkte zwischen E, A bewiesen werden. „Es ist aber auch für alle Punkte zwischen E, B bewie„sen. Folglich ist unter allen auf ähnliche Art aus AB er„haltenen Parallelepipeden das $BE^{q} \times EA$ das gröste, „wenn $BE = 2EA$.

„Nun ist noch zu bemerken, was sich bey der ange„zeigten Construction ereignet. Da sowohl $BS^{q} \times SA$ „als $Bs^{q} \times sA < BE^{q} \times EA$ bewiesen worden ist; so „lässt sich, wenn das Parallelepipedum aus dem gegebenen „Raum und der gegebenen geraden Linie kleiner ist als „das $BE^{q} \times EA$, die AB in zwey Punkten so theilen, „dass der Aufgabe Genüge geschieht. Dis geschieht, wenn „wir uns um den Durchmesser Gx eine Parabel beschrieben „gedenken, deren Applicaten den Rechteken aus den Ab„scissen und Gy gleich seyen. Diese geht nun durch T. „Und da sie mit der CN, welche ihrem Durchmesser par„allel ist, zusammentreffen muss; so schneidet sie die Hy„perbel noch in einem andern Punkt oberhalb K, wie hier „in R. Und ein von R auf AB gefälltes Loth, wie hier „Rs, schneidet die AB in s, so dass der Punkt s der „Aufgabe Genüge leistet, und $BS^{q} \times SA = Bs^{q} \times sA$ „wird, wie aus den vorhin geführten Beweisen erhellt. „Da sich demnach auf BA zwey Punkte finden lassen, „welche das Verlangte erfüllen, so kann man nehmen „welchen man will, den zwischen E, B, oder den zwi„schen E, A. Will man den zwischen E, B, so wird, „da die durch G, T gehende Parabel die Hyperbel in zwey „Punkten schneidet, der nähere bey G oder bey der Axe „der Parabel den zwischen E, B bestimmen, wie hier der „T den S bestimmt; der entferntere aber wird den zwi„schen E, A bestimmen, wie hier R den s bestimmt.

Dis die Analyse und Composition im allgemeinen. Eutocius kommt hierauf zur Anwendung auf die Aufgabe des Vten Sazes, welche dahin zurükgeführt wurde: (Fig. 44.) *DF in X so zu theilen, dass XF zu einer gegebenen sich verhalte wie ein gegebener Raum zu DX*^{q}. Wenn nun das Parallelepipedum aus dem gegebenen Raum und der gegebenen geraden Linie $> DB^q \times BF$ wäre; so wäre die Aufgabe unmöglich; wenn es aber $= DB^q \times BF$ wäre, so würde der Punkt *B* der leztern Aufgabe Genüge leisten, aber zur anfänglichen Aufgabe Archimeds nicht dienen; denn die Kugel könnte durch *B* nicht im gegebenen Verhältniss getheilt seyn. Daher erklärt Archimed; „*dass die Aufgabe so allgemein ausgedrükt eine Bestimmung habe.*" Diese Bestimmung aber fällt weg „*wenn man die hier statt findenden Bedingungen dazu nimmt dass DB = 2 BF, und BF > FH sey, und die Aufgabe so lautet: Es sind zwo gerade Linien DB. BF gegeben, und DB ist das doppelte von BF, und auf BF ein Punkt H; die BD in X so zu schneiden, dass XF : FH = DB^q : DX^q*". Denn hier ist offenbar, dass $DB^q \times FH < DB^q \times BF$ und von den beyden Punkten, welche der Aufgabe Genüge leisten würden, wenn *DF* getheilt werden sollte, nur derjenige genommen werden kann, der zwischen *B*, *D* liegt.

Dionysodors Auflösung der Aufgabe des Vten Satzes. (*Fig. 57.*)

„Es sey die gegebene Kugel, deren Durchmesser *AB*, das gegebene Verhältnis *CD* : *DE*. „Man soll die Kugel durch eine auf *AB* senkrechte Ebene so theilen, dafs der Abschnitt, „dessen Scheitel *A*, zum Abschnitt, dessen „Scheitel *B*, sich verhalte, wie *CD* zu *DE*."

„Es sey *BA* nach *F* verlängert so, dass *AF* = „$\frac{1}{2}$ *AB*; und *CE* : *ED* = *FA* : *AG*, und *AG* auf *AB* „senkrecht; ferner *FA* : *AH* = *AH* : *AG*; so ist *AH* > *AG*. „Durch *F* um die Axe *FB* beschreibe man eine Parabel, „so dass die Quadrate ihrer Applicaten den Rechteken „aus den Abscissen und *AG* gleich seyen; diese wird „durch *H* gehen; weil *HA*^{q} = *FAG*. Sie sey beschrie„ben, und *FHK* sey dieselbe. Durch *B* ziehe man *BK*

„der AH parallel, welche die Parabel in K schneide. „Durch G um die Asymptoten FB, BK beschreibe man „eine Hyperbel, welche die Parabel zwischen H, K „schneiden wird. Dis geschehe in L. Von L fälle man „auf AB die LM senkrecht, und ziehe durch G, L die „GN, LO der AB parallel.

„Da nun GL eine Hyperbel ist, AB, BK ihre Asymptoten, und ML, LO den AG, GN parallel; so ist Rchk „$AGN = MLO$ d. i. $LMB = GAB$, folglich $LM : GA = AB : BM$. Und da wegen der Parabel $LM^q = FM \times AG$, so ist $FM : ML = ML : AG$, $FM : AG = LM^q : GA^q = AB^q : BM^q$ = Kreis, dessen Halbmesser AB: „Kreis, dessen Halbmesser BM. Folglich ist der Kegel, „der den Kreis, dessen Halbmesser AB, zur Grundfläche „und AG zur Höhe hat, dem Kegel gleich, der den Kreis, „dessen Halbmesser BM, zur Grundfläche und FM zur „Höhe hat (B. I, Lehns. 4.). Folglich hat der Kegel, der „den Kreis, dessen Halbmesser AB, zur Grundfläche und „FA zur Höhe hat, zum Kegel, welcher den Kreis, dessen „Halbmesser BM, zur Grundfläche und FM zur Höhe „hat, das nämliche Verhältnis wie zum Kegel, der den „Kreis, dessen Halbmesser AB, zur Grundfläche und AG „zur Höhe hat, das ist (B. 1, Lehns. 1.) das $FA : AG$, d. „i., das $CE : ED$. Nun ist aber der Kegel, der den Kreis, „dessen Halbmesser AB, zur Grundfläche, und FA zur Hö„he hat, der Kugel gleich (B. I, Saz XXXVI.); und der „Kegel, der den Kreis, dessen Halbmesser BM, zur Grund„fläche und FM zur Höhe hat, ist dem Kugelabschnitt „gleich, dessen Scheitel B und dessen Höhe BM ist, wie „bewiesen werden wird. Folglich verhält sich die Kugel „zum erwähnten Abschnitt wie CE zu ED; und *getrennt* „der Abschnitt, dessen Scheitel A und dessen Höhe AM „zum Abschnitt, dessen Scheitel B und Höhe BM, wie „CD zu DE. Mithin theilt die durch LM gelegte auf AB „senkrechte Ebene die Kugel im gegebenen Verhältnis.

„Dass aber der Kegel, der den Kreis, dessen Halbmes„ser BM, zur Grundfläche und FM zur Höhe hat, dem „Kugelabschnitt gleich sey, dessen Scheitel B und dessen „Höhe BM ist, wird so bewiesen. Es sey $FM : MA$ „$= PM : MB$. So ist der Kegel, der die nämliche Grund„fläche mit dem Abschnitt und PM zur Höhe hat, dem Ab„schnitt gleich (B. II. S. II.) Und da $FM : MA = PM : MB$, „so ist *verwechselt* $FM : PM = MA : MB = QM^1 : MB^q$.

„= Kreis, dessen Halbmesser QM : Kreis, dessen Halbmesser MB. Folglich ist der Kegel, der den Kreis, dessen Halbmesser MB, zur Grundfläche und FM zur Höhe hat, dem Kegel, der den Kreis, dessen Halbmesser QM, zur Grundfläche und PM zur Höhe hat (B. I. Lehns. 4.) „und mithin auch dem Kugelabschnitt gleich.“

Da, wie in der Archimedischen Auflösung der Aufgabe des Vten Satzes bemerkt wird (Fig. 44.), das Verhältnis $LX : XR$ gegeben ist, und $LD : DX$ wie die gegebene Halbmesser KB zu BX, $LD : DX$ wie der nämliche Halbmesser zu CE sich verhält, so nimmt

Diokles

zur Auflösung der genannten Aufgabe folgende Hülfsaufgabe vor; (Fig. 58.)

„Eine gegebene gerade Linie AB in E zu theilen und ihr FA, GB anzusezen, so dass $FE : EG$ „das gegebene Verhältnis $C : D$ habe, und $FA : AE$ „wie eine gegebene zu BE, $GB : BE$ wie die nämliche gegebene zu AE sich verhalte.

„Es sey geschehen. Man ziehe HAK, LBM auf „AB senkrecht, nehme $AK = BM =$ der gegebenen, ziehe KE, ME und verlängere sie nach L, H. Man ziehe ferner KM, durch L die LN der AB, und durch E „die $OEPQ$ der NK parallel. Da nun

$FA : AE = MB : BE$, wie vorausgesezt wird,

$MB : BE = HA : AE$ wegen der Aehnlichkeit der Dreyeke,

„so ist $FA : AE = HA : AE$, folglich $FA = HA$.
„Aus dem nämlichen Grund ist $BG = BL$.

„Und da $HA + AE : MB + BE = AE : EB = KA + AE$ „$: LB + BE$, so ist $(LB + BE) \times (HA + AE) = (KA$ „$+ AE) \times (MB + BE)$. Es seyen AR, BS beyde = „KA. Nun ist $HA + AE = FE$, $LB + BE = EG$, $KA +$ „$AE = RE$, $MB + BE = SE$; und $FEG = RES$. Wenn „daher R zwischen A, F fällt, so wird S über G hinaus„fallen, und umgekehrt. Nun ist $C : D = FE : EG =$ „$\left\{\begin{matrix} FEG \\ RES \end{matrix}\right\} : EG^q$. Es sey $PE = EB$, und BP gezogen „und auf beyden Seiten verlängert treffe mit den in S, R

„senkrechten ST, RV in T, V zusammen. Da nun TV „durch den gegebenen Punkt B an die der Lage nach gege„benen AB gezogen ist, so dass sie mit ihr einen gegebe„nen Winkel EBP, nämlich die Hälfte eines rechten „macht; so ist die TV der Lage nach gegeben. Und da „die von den der Lage nach gegebenen Punkten S, R ge„zogenen ST, RV dieselbe in T, V schneiden; so sind „die Punkte T, V gegeben; mithin ist TV der Lage und „Grösse nach gegeben. Und da

$TB:BP=SB:BE$ weg. Aehnl. d. $\Delta\Delta EPB, SBF$;

„so ist *verb.* $TP:PB=SE:EB$.

„Aber $BP:PV=BE:ER$

„also *gleichf.* $\left\{\begin{matrix} TP & :PV \\ TPV:PV^q \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} SE & :ER \\ SER:ER^q \end{matrix}\right\}$

„u. *verw.* $TPV:SER = PV^q:ER^q$.

„Nun ist $PV^q=2ER^q$, da auch $PB^q=2BE^q$.

Folgl. $TPV=2SER$.

„Es ist aber bewiesen wor„den, dass $SER : EG^q = C:D$;

„Mithin $TPV : \left\{\begin{matrix} EG^q \\ OP^q \end{matrix}\right\}=2C:D$,

da $EG=LB+BE=OP$.

„Und das Verhältnis $2C:D$ ist gegeben; folglich auch das „Verhältnis $TPV:OP^q$. Wenn wir demnach machen „$2C:D=TV$: einer andern, wie X; und um TV eine „Ellipse beschreiben, so dass die Quadrate der Applicaten „unter dem Winkel OPB, d. i. der Hälfte eines rechten „gleich seyen den an X angelegten Rechteken, welche „(die Abscissen zu Breiten und) eine dem Rechtek $TV\times$ „X ähnliche Figur zur Ergänzung haben; so wird diesel„be durch O gehen. Sie sey beschrieben, und VOT sey „dieselbe. Der Punkt O berührt demnach eine der Lage „nach gegebene Ellipse (Apoll. Cōnic. I, 21. Conv.) Und „da LK Diagonale des Parallelogramms NM ist, so ist „$NOQ=ABM$. Wenn wir also durch B um die Asym„ptoten HK, KM eine Hyperbel beschreiben, so wird sie „durch O gehen und der Lage nach gegeben seyn, da so „wohl der Punkt B als AB, BM, mithin auch die Asymp„toten HK, KM der Lage nach gegeben sind. Sie sey „beschrieben und OB sey dieselbe. So berührt demnach „der Punkt O eine der Lage nach gegebene Hyperbel. „Er berührte aber auch eine der Lage nach gegebene El„lipse. Folglich ist der Punkt O gegeben, und das Loth

„von ihm OE; mithin der Punkt E. Und da $MB : BE =$ „$FA : AE$ und AE gegeben ist, so ist AF gegeben. Aus „gleichem Grund ist GB gegeben.

Compositio n.

„AB sey die gegebene zu theilende gerade Linie, „AK die andere gegebene, $C : D$ das gegebene Verhält„nis. Man ziehe auf AB die $Bm = AK$ senkrecht, ziehe „KM; nehme AR und BS beyde $= AK$, und errichte „in R, S die Lothe RV, ST. An den Punkt B lege „man den Winkel ABP, die Hälfte eines Rechten an, „und BE auf beyden Seiten verlängert schneide die RV, „ST in V, T. Man mache $2C : D = TV : X$, und „beschreibe um TV eine Ellipse; so dass die Quadrate „der Applicaten unter der Hälfte eines rechten Winkels „gleich seyen den an X angelegten Rechteken, welche „(die Abscissen zu Breiten und) eine dem Rechtek $TV \times$ „X ähnliche Figur zur Ergänzung haben (Apoll. Conic. „l. 54.) Durch B um die Asymptoten AK, KM beschrei„be man die Hyperbel BO, welche die Ellipse in O „schneide; von O ziehe man auf AB die OE senkrecht „und verlängere sie nach Q. Durch O ziehe man LON „der AB parallel, verlängere KA, MB nach H, L, ziehe „ME, welche verlängert mit KN in H zusammentreffe. „Da nun BO eine Hyperbel ist, HK, KM ihre Asymp„toten, so ist $NOQ = ABM$, und daher KEL eine ge„rade Linie. Es sey $FA = HA$, $GB = BL$.

„Da nun $2C:D = TV:X$, u. $TV:X = TPV:OP_q$ (Ap. Con. I, 21)
„so ist $2C:D = TPV:OP_q$.
„Und da $TB:BP = SB:BE$,
„so ist *verbunden* $TP:PB = SE:EB$.
„Aber $BP:PV = BE:ER$;

„folgl. *gleichförmig* $\left\{\begin{matrix} TP:PV \\ TPV:PV_q \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} SE:ER \\ SER:EH_q \end{matrix}\right\}$
„und *verwechselt* $TPV:SER = PV_q:ER_q$.

„Nun ist $PV_q = 2ER_q$, da $PB_q = 2BE_q$, weil BE „$= EP$, indem die Winkel „bey B, P halbe rechte sind.

„Folgl. ist auch $TPV = 2SER$. Und da bewiesen worden, „dass $2C:D = TPV:OP_q$; so ist, wenn man die Hälften der „Vorderglieder nimmt, $C:D = SER:\left\{\begin{matrix} OP_q \\ EG_q \end{matrix}\right\}$, da beyde „$OP$, $EG = LB + BE$. Da nun

$HA+AE:MB+BE=AE:EB=KA+AE:LB+BE$,
„so ist $(HA+AE)\times(LB+BE)=(KA+AE)\times(MB+BE)$.
„Aber $HA+AE=FE$, $LB+BE=EG$, $KA+AE=RE$.
$MB+BE=ES$.
„Folglich $FEG=RES$. Und $C:D=FEG:EG^q=FE:EG$.
„Und da $MB:BE=HA:AE$, $HA=FA$; so ist $MB:BE=FA:AE$.
„Aus gleichem Grunde $KA:AE=GB:BE$.

„Demnach ist geschehen, was verlangt worden ist: es „war nämlich die gerade Linie AB, eine andere AK und „das Verhältnis $C:D$ gegeben; und es ist auf AB der „Punkt E genommen, und ihr FA, GB angesezt worden, „so dass $FE:EG$ das gegebene Verhältnis hat, die gege„bene MB zu BE wie FA zu AE, und die nämliche gege„bene KA zu AE wie GB zu BE sich verhält.“

Wird nun vermittelst dieser aufgelösten Aufgabe (Fig. 44.) auf der gegebenen BD, dem Durchmesser der im gegebenen Verhältnis $Q:S$ zu theilenden Kugel, der Punkt X genommen, und ihr RB, LD angesezt, so dass $LX:XR=Q:S$, und $LD:DX$ wie die gegebene $KB:BX$, $RB:BX$ wie die nämliche gegebene $KD:DX$ sich verhalte; so wird die Kugel von einer durch X senkrecht auf AB gelegten Ebene im gegebenen Verhältnis getheilt seyn. Denn es ist alsdenn auch *verbunden* $LX:XD=KB+BX:BX$, $RX:XB=KD+DX:DX$; mithin sind (B. II, S. III.) die Kegel, welche L, R zu Spizen, den Kreis um den Durchmesser AC zur gemeinschaftlichen Grundfläche haben, den Kugelabschnitten ADC, ABC gleich. Und diese Kegel verhalten sich wie $LX:XR$, das ist wie $Q:S$, folglich haben auch die Abschnitte das gegebene Verhältnis $Q:S$. *Soweit Eutocius.*

Huygens führt die Aufgabe des Vten Sazes auf die der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurük „et hæc construendi ratio“, *sagt er*, „in solidis „problematibus quodammodo simplicissima videtur atque „ad usum maxime accommodata.“ Opp. Var. Vol. II. p. 388. sqq.

Saz VI. Fig. 45.

Einen Kugelabschnitt zu beschreiben, der einem gegebenen ähnlich und einem andern gegebenen gleich sey.

Es seyen ABC, EFG die beyden gegebenen Kugelabschnitte. Die Grundfläche des Abschnitts ABC sey der Kreis um den Durchmesser AB, sein Scheitel der Punkt C: die Grundfläche des EFG der Kreis um den Durchmesser EF, und sein Scheitel der Punkt G. Man soll einen Kugelabschnitt finden, der dem Abschnitt ABC gleich und dem EFG ähnlich sey.

Er sey gefunden; und sey der HKL, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchm KH und dessen Scheitel der Punkt L ist. Es seyen $ANBC$, $HOKL$, $EPFG$ (gröste) Kreise der Kugeln, und CN, LO, PG deren auf den Grundflächen der Abschnitte senkrechte Durchmesser; Q, R, S die Mittelpunkte. Man mache $QN+NT : NT = XT : TC$, $RO+OV : OV = YV : VL$, und $SP+PW : PW = ZW : WG$, und gedenke Kegel, deren Grundflächen die Kreise um die Durchmesser AB, HK, EF und deren Spizen die Punkte X, Y, Z seyen. So ist der Kegel ABX dem Kugelabschnitt ABC, der Kegel YHK dem HKL, der EZF dem EGF gleich (B. II. Saz III.). Und da der Kugelabschnitt ABC dem Abschnitt HKL gleich ist, so ist auch der Kegel AXB dem Kegel YHK gleich. Bey gleichen Kegeln aber sind Grundflächen und Höhen umgekehrt proportionirt (B. I. Lehns. 4.). Folglich der Kreis um den Durchmesser AB : Kreis um den Durchmesser $HK = YV : XT$. Der erste Kreis aber zum andern $= ABq : HKq$. Folglich $ABq : HKq = YV : XT$. Und da der Abschnitt EFG dem Abschnitt HKL ähnlich ist, so ist der Kegel EFZ dem Kegel GHK ähnlich *); Folglich $ZW : EF = YV : HK$. Aber das Verhältnis $ZW : EF$ ist gegeben. Folglich ist auch das Verhältnis $YV : HK$ gegeben. Es sey das Verhältnis $XT : D$ demselben gleich; so wird, da

*) Nämlich der Kreisabschnitt EGF ist dem Kreisabschnitt KLH ähnlich, mithin die Winkel KLH, EG Fgleich, und ihre Hälfen, EGW = KLV; daher die ΔΔ EWG, KVL wie auch die EWP, KVO gleichwinklich. Folglich

	GW : WE = LV : VK, und GW : EF = LV : HK,
	WE : WP = VK : VO,
und gleichförmig	GW : WP = LV : VO
und verbunden	GP : PW = LO : OV
u. die Vordergl. halbirt,	SP : PW = RO : OV
und verbunden	SP+PW : PW = RO+OV : OV
das ist	ZW : WG = YV : VL.
Nun war	WG : EF = VL : HK;
also gleichförmig	ZW : EF = YV : HK.

Eutocius.

XT gegeben ist, D gegeben seyn. Und da $\Upsilon V : XT = AB^q : HK^q = HK : D$; so ist, wenn man $HK^q = AB \times J$ sezt, $AB^q : HK^q = AB : J = HK : D$; und *verwechselt* $AB : HK = J : D$. Aber $AB : HK = HK : J$. Folglich $AB : HK = HK : J = J : D$. Folglich sind die HK, J zwo stetige mittlere Proportionallinien zwischen zweyen gegebenen AB, D.

Composition.

Es sey ABC der Abschnitt, dem der zu construirende gleich, EFG derjenige, dem er ähnlich seyn soll. $ABCN$, $GEPF$ seyen gröste Kreise der Kugeln, CN, GP ihre Durchmesser, Q, S ihre Mittelpunkte. Man mache $QN + NT : NT = XT : TC$, und $SP + PW : PW = ZW : WG$; so ist der Kegel XAB dem Kugelabschnitt ABC, der FZE dem EFG gleich (B. II. S. III.). Man mache $ZW : EF = XT : D$, und nehme zwischen den zwo gegebenen geraden Linien AB, D zwo mittlere Proportionallinien HK, J, so dass $AB : HK = HK : J = J : D$. Man beschreibe auf HK einen dem EFG ähnlichen Kugelabschn. HKL (E. III, 33), und vollende den Kreis; LO sey sein Durchmesser. Man gedenke sich eine Kugel, deren gröster Kreis $LHOK$ sey, und ihr Mittelpunkt R; und lege durch HK eine Ebene senkrecht auf LO. So ist der an einerley Seite mit L befindliche Kugelabschnitt dem Kugelabschnitt EFG ähnlich, da die Kreisabschnitte ähnlich sind. Ich behaupte ferner, dass er auch dem Kugelabschnitt ABC gleich sey. Denn man mache $RO + OV : OV = \Upsilon V : VL$; so ist der Kegel ΥHK dem Kugelabschnitt HKL gleich (B. II. Saz III.) Und da der Kegel ΥHK dem Kegel FZE ähnlich ist, so ist $ZW : EF$ d. i. $XT : D = \Upsilon V : HK$ und *verwechselt* und *umgekehrt* $\Upsilon V : XT = HK : D$. Und da AB, HK, J, D stetig proportionirt sind, so ist $AB^q : HK^q = HK : D$. folglich $AB^q : HK^q$ d. i. Kreis um den Durchmesser AB : Kreis um den Durchmesser $HK = \Upsilon V : XT$. Folglich ist der Kegel XAB dem ΥHK gleich (B. I. Lehns. 4). Mithin ist auch der Kugelabschnitt ABC dem Kugelabschnitt HKL gleich. Demnach ist ein Kugelabschnitt HKL construirt worden, der dem gegebenen ABC gleich und dem andern gegebenen EFG ähnlich ist.

Satz VII. Fig. 46.

Wenn zwey Kugelabschnitte, sie mögen von einerley Kugel seyn oder nicht, gegeben sind; einen Kugelabschnitt zu finden, welcher einem der gegebenen ähnlich und dessen Oberfläche der Oberfläche des andern gleich sey.

Es seyen die durch die Bögen *ABC*, *DEF* gehenden Kugelabschnitte die gegebenen; der durch den Bogen *ABC* sey derjenige, dem der zu findende ähnlich, der durch den *DEF* gehende der, dessen Oberfläche seine Oberfl. gleich seyn soll. Man seze, *KLM* sey der Kugelabschnitt, der dem Abschnitt *ABC* ähnlich und dessen Oberfläche der Oberfläche des Abschn. *DEF* gleich sey. Man gedenke sich die Mittelpunkte der Kugeln und durch dieselbe Ebenen gelegt, die auf den Grundflächen der Abschnitte senkrecht stehen, und deren Durchschnitte mit den Kugeln die grösten Kreise *KLMN*, *BAHC*, *EFGD*, mit den Grundflächen der Abschnitte aber die geraden Linien *KM*, *AC*, *DF* seyen. *LN*, *BH*, *EG* seyen auf den *KM*, *AC*, *DF* senkrechte Durchmesser der Kugeln. Man ziehe die geraden Linien *LM*, *BC*, *EF*.

Da die Oberfläche des Kugelabschnitts *KLM* der Oberfläche des Kugelabschnitts *DEF* gleich ist, so ist auch der Kreis, dessen Halbmesser *LM*, dem Kreise, dessen Halbmesser *EF* ist, gleich; denn die Oberflächen gedachter Kugelabschnitte sind Kreisen gleich bewiesen worden, deren Halbmesser den von den Scheiteln der Abschnitte an ihre Grundflächen gezogenen geraden Linien gleich sind (B. I. S. XLVIII, IL.). Folglich ist auch die *LM* der *EF* gleich. Da ferner der Abschnitt *KLM*, dem *ABC* ähnlich ist, so ist $LR : RN = BQ : QH$,

u. *umgek.* u. *vbd.* $NL : LR = HB : BQ$.

Aber $RL : LM = QB : BC$, denn die Dreyeke sind auch ähnlich.

Folglich $NL : \left\{\begin{matrix} LM \\ EF \end{matrix}\right\} = HB : BC$, und *verwechselt.*

Es ist aber das Verhältnis $EF : BC$ gegeben; denn jede von ihnen ist gegeben. Folglich ist das Verhältnis $LN : BH$ gegeben. Und BH ist gegeben. Folglich ist auch LN gegeben; mithin ist die Kugel gegeben.

Compositio n.

Es seyen die beyden gegebenen Kugelabschnitte *ABC*, *DEF*; der *ABC*, welchem der verlangte ähnlich, der *DEF*, dessen Oberfläche seiner Oberfläche gleich seyn soll. Man mache die nämliche Construction wie in der Analyse, mache $BC : EF = BH : LN$, und beschreibe einen Kreis um den Durchmesser *LN*. Man gedenke sich eine Kugel, von der *LKNM* ein gröster Kreis sey, theile *LN* in *R* so, dass $HQ : QB = NR : RL$, schneide die Oberfläche mit einer auf *LN* senkrechten Ebene durch *R*, und ziehe *LM*.

So sind die Kreisabschnitte auf den geraden Linien *KM*, *AC* einander ähnlich; folglich sind auch die Kugelabschnitte ähnlich. Und da

$HB : BQ = NL : LR$ vermöge der Construction,

und $QB : BC = RL : LM$ (wegen Aehnl. der Dreyeke);

so ist $(\overline{HB : BC = NL : LM},)$ $HB : NL = BC : LM$.

Es war aber auch $HB : NL = BC : EF$;

folglich $LM = EF$, und der Kreis, dessen Halbmesser *EF*, gleich dem Kreis, dessen Halbmesser *LM*. Nun ist der Kreis, dessen Halbmesser *EF*, der Oberfläche des Abschnitts *DEF*, der Kreis, dessen Halbmesser *LM*, der Oberfläche des Abschnitts *KLM* gleich. Folglich ist auch die Oberfläche des Abschnitts *KLM* der Oberfläche des Abschnitts *DEF* gleich. Auch ist der *KLM* dem *ABC* ähnlich.

Satz VIII. Fig. 47.

Von einer gegebenen Kugel durch eine Ebene einen Abschnitt abzuschneiden, welcher zu dem Kegel, der einerley Grundfläche und gleiche Höhe mit dem Abschnitt hat, ein gegebenes Verhältnis habe.

Es sey die gegebene Kugel, deren gröster Kreis *ABCD* und deren Durchmesser *BD* ist. Man soll die Kugel mit einer Ebene durch *AC* so theilen, dass der Abschnitt *ABC* zum Kegel *ABC* ein gegebenes Verhältnis habe.

Es sey geschehen. Der Mittelpunkt der Kugel sey *E*, und $ED + DF : DF = GF : FB$. So ist der Kreis *ACG*

dem Abschnitt *ABC* gleich (B. II. S. III.). Mithin ist das Verhältnis des Kegels *AGC* zum Kegel *ABC*, folglich auch (B. I. Lehns. 1.) das Verhältnis *GF*: *FB* gegeben. Aber *GF*: *FB* = *ED* + *DF*: *DF*. Folglich ist das Verhältnis *ED* + *DF*: *DF*, folglich auch das *ED*: *DF* gegeben: Mithin ist *DF* gegeben; also auch *AC*. Und da *ED* + *DF* : *DF* > *ED* + *DB*: *DB* *), *ED* + *DB* = 3*ED*, *DB* = 2*ED*, so ist *ED* + *DF*: *DF* > 3 : 2. Nun ist das Verhältnis *ED* + *DF*: *DF* einerley mit dem gegebenen. Folglich muss das gegebene Verhältnis > 3 : 2 seyn.

Composition.

Es sey die gegebene Kugel, von welcher *ABCD* ein gröster Kreis, *BD* ihr Durchmesser, *E* ihr Mittelpunkt; und das gegebene Verhältnis *HK* : *KL* > 3 : 2. Nun ist 3:2 = *ED* + *DB*: *DB*. Folglich *HK*: *KL* > *ED* + *DB*: *DB*, und *getrennt* *HL*: *LK* > *ED*: *DB*. Man mache *HL*: *LK* = *ED*: *DF*, ziehe durch *F* die *AFC* senkrecht, und lege durch *AC* eine auf *BD* senkrechte Ebene. Ich behaupte, dass der Kugelabschnitt *ABC* zum Kegel *ABC* sich verhalte wie *HK* zu *KL*.

Denn man mache *ED* + *DF*: *DF* = *GF*: *FB*; so ist der Kegel *CAG* dem Kugelabschnitt *ABC* gleich. Und da *HK* : *KL* = *ED* + *DF*: *DF*, d. i. = *GF*: *FB*, d. i. = Kegel *AGC* : Kegel *ABC*, der Kegel *AGC* aber dem Kugelabschnitt *ABC* gleich ist: so ist der Kugelabschnitt *ABC*: Kegel *ABC* = *HK* : *KL*.

Satz IX. Fig. 48.

Wenn eine Kugel von einer Ebene geschnitten wird, die nicht durch den Mittelpunkt geht; so hat der grössere Abschnitt zum kleinern ein kleineres Verhältnis als das duplicirte von dem, welches die Oberfläche des grössern Abschnitts zur Oberfläche des kleinern hat, ein grösseres aber als das veranderthalbfachte.

Es sey eine Kugel, und in ihr ein gröster Kreis *ABCD* und ein Durchmesser *BD*. Sie sey von einer durch *AC* gehenden auf dem Kreis *ABCD* senkrechten Ebene geschnit-

*) Weil DF < DB; folglich ED:DF > ED:DB und verbunden. Eut.

ten, und ABC der grössere Kugelabschnitt. Ich behaupte, dass der Abschnitt ABC zu dem ADC ein kleineres Verhältnis habe als das duplicirte Verhältnis von dem, welches die Oberfläche des grössern Abschnitts zur Oberfläche des kleinern hat, ein grösseres aber als das veranderthalbfachte.

Denn man ziehe BA, AD: der Mittelpunkt sey E, und $ED+DF:DF=HF:FB$, $EB+BF:BF=GF:FD$; und man gedenke sich Kegel, welche zur Grundfläche den Kreis um den Durchmesser AC, zu Spizen die Punkte H, G haben. So wird der Kegel ACH dem Kugelabschnitt ABC, der Kegel ACG dem Abschnitt ADC gleich seyn (B. II. S. III.). Und es ist $BA^q:AD^q=$ Oberfläche des Abschnitts ABC: Oberfläche des Abschnitts ADC, wie vorhin (bey S. IV. B. II.) gezeigt worden ist. Es ist aber zu beweisen, dass der grössere Kugelabschnitt zum kleinern ein kleineres Verhältnis habe als das duplicirte von dem der Oberfläche des grössern zur Oberfläche des kleinern Abschnitts. Ich behaupte nun, dass auch der Kegel AHC zum Kegel AGC (d. i. $HF:FG$) ein kleineres Verhältnis habe als das duplicirte von dem $BA^q:AD^q$ d. i. von dem $BF:FD$.

Da $ED+DF:DF=HF:FB$, so ist $BF:FD=HB:\left\{\begin{matrix}BE\\ED\end{matrix}\right\}$, wie oben (beym III. S.) bewiesen worden.

Wiederum da $EB+BF:BF=GF:FD$, so ist, wenn $BK=BE$, welche $\lessdot HB$, weil $FD\lessdot BF$,

auch $KF:FB=GF:FD$, (u. vw. $KF:FG=BF:FD$)

Mithin, da $BF:FD=HB:\left\{\begin{matrix}BE\\BK\end{matrix}\right\}$; $HB:BK=KF:FG$.

Nun ist $HF:FK\lessdot HB:BK$ *). Folgl. auch $HF:FK\lessdot KF:FG$ **)

Folglich $HFG\lessdot KF^q$, u. $\left\{\begin{matrix}HFG:FG^q\\HF:FG\end{matrix}\right\}\lessdot KF^q:FG^q$.

Aber das Verhältnis $KF^q:FG^q$ ist das duplicirte v. $KF:FG$ (E. VI, 20.).

Folgl. ist das Verhältnis $HF:FG\lessdot$ das duplicirte von $KF:FG$, und da $KF:FG=BF:FD$, das Verhältnis $HF:FG\lessdot$ das duplicirte von $BF:FD$. Welches wir suchten.

---

*) Weil $KF>KB$, folglich $HK:KF\lessdot HK:KB$ und verbunden. Eut.

**) Und $HFG:KFG\lessdot KF^q:KFG$ (E. VI, 1.). Eut.

Da $BE = ED$, so ist $BFD < BED$ (E. II, 5.). Folgl. $FB : BE < \left\{\begin{matrix} ED : DF \\ HB : BF \end{matrix}\right\}$ *); daher $FB^q < \left\{\begin{matrix} HBE \\ HBK \end{matrix}\right\}$.

Es sey $BN^q = HBK$. So ist $HB : BK = HN^q : NK^q$ **)

Aber es ist $HF^q : FK^q > HN^q : NK^q$ **)

folglich auch $HF^q : FK^q > \left\{\begin{matrix} HB : BK \\ KF : FG \end{matrix}\right\}$,

und daher das Verhältnis $HF : FG >$ das veranderthalbfachte von $KF : FG$ ***).

Nun ist $HF : FG =$ Kegel AHC : Kegel $AGC =$ Abschnitt ABC : Abschnitt ADC,

und $KF : FG = FB : FD =$ Oberfläche des Abschn. ABC : Oberfl. des Absch. ADC.

Folglich hat der grössere Abschnitt zum kleinern ein kleineres Verhältnis als der duplicirte von dem, welches die Oberfläche des grössern Abschnitts zur Oberfläche des kleinern hat, ein grösseres aber als das veranderthalbfachte von demselben.

Anders: (*Fig.* 49.)

Es sey eine Kugel, in welcher $ABCD$ ein gröster Kreis, AC ein Durchmesser, E der Mittelpunkt sey; und sie sey von einer durch BD gehenden auf AC senkrechten Ebene geschnitten. Ich behaupte, dals der grössere Abschnitt DAB zum kleinern BCD ein kleineres Verhältnis als das duplicirte von dem, welches die Oberfläche des Abschnitts ABD zur Oberfläche des Abschnitts BCD hat, ein grösseres aber als das veranderthalbfachte habe.

Denn man ziehe AB, BC. Das Verhältnis der ersten Oberfläche zur andern ist das des Kreises, dessen

---

*) Weil BFD : BE × FD < BED : BE × FD, und E. VI, 1. Allgemein; wenn A, B, C, D, vier gerade Linien sind, und A × D > B × C, so ist A : B > C : D; und umgekehrt. Und wenn A × C > Bq, so ist A : B > B : C, u. umg. Eut.

**) Denn es ist HB : BN = BN : BK (E. VI, 17.) = HN : NK (E. V, 12.), folglich HB : BK = HBq : BNq = HNq : NKq (E. VI, 20. 22.). Eut.

***) Weil FB < NB, FK < NK, folglich HK : KF > HK : KN, und verbunden HF : FK > HN : NK, und duplicirt. Eut.

****) Man nehme M, KF, N, FG stetig proportionirt. So ist das Verhältnis M : FG das veranderthalbfachte von dem KF : FG, und Mq : KFq = KF : FG (E. VI, 20. 22.). Aber HFq : KFq > KF : FG, also > Mq : KFq, und HF > M. Daher das Verhältnis HF : FG > M : FG d. i. > das veranderthalbfachte von dem KF : FG. Eut.

Halbm. AB, zum Kreis, dessen Halbm. BC, das ist, das von AH zu HC. Man seze AF, CG dem Halbm. des Kreises gleich. Das Verhältnis des Abschnitts BAD zu dem BCD ist zusammengesezt aus dem, welches der Abschnitt BAD zum Kegel hat, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser BD und dessen Spize der Punkt A ist, und eben dieser Kegel zum Kegel, der die nämliche Grundfläche und den Punkt C zur Spize hat, und dieser leztgedachte Kegel zum Abschnitte BCD. Aber

der Abschnitt BAD:Kegel $BAD = GH:HC$ (B.II. S. III.Zns.)
Kegel BAD:Kegel $BCD = AH:HC$ (B. I. Lehns. 1)
Kegel BCD:Abschn.$BCD = AH:HF$ (B.II. S. IIIZus.)

Das aus den Verhältnissen $GH:HC$, $AH:HC$ zusammengesezte Verhältnis aber ist das $GHA:HC^q$ (E. VI, 23.), und das aus $GHA:HC^q$, $AH:HF$ zusammengesezte ist das des rechtwinklichen Parallelepipedums $GHA \times HA : HC^q \times HF$ *), welches $= GH \times HA^q : HC^q \times HF$. Aber

$$GH \times HA^q : HC^q \times HG = HA^q : HC^q \quad \text{(E.XI, 32).}$$

Da nun $GH \times HA^q : HC^q \times HF < AH : HC$ duplicirt, d. i. $< HA^q : HC^q$ seyn soll;

so muss $GH \times HA^q : HC^q \times HF < GH \times HA^q : HC^q \times HG$ (E. XI, 32),

folglich $HC^q \times HF > HC^q \times HG$, $HF > HG$ seyn; (welches richtig ist).

Ich behaupte nun auch, dass der grössere Abschnitt zum kleinern ein grösseres Verhältnis habe als das veranderthalbfachte von dem, welches die Oberfläche des ersten zur Oberfläche des andern hat.

Das Verhältnis des einen Abschnitts zum andern ist vermöge des bewiesenen $= GH \times HA^q : HC^q \times HF$; das veranderthalbfachte Verhältnis der einen Oberfläche zur andern aber ist $= AB^c : BC^c$ **). Es wird also behauptet: dass $GH \times HA^q : HC^q \times HF > AB^c : BC^c$; d. i. $> AH^c : BH^c$ (E. VI, 8. XI, 37.) d. i. $>$ das aus $AH^q : BH^q$ und

*) Denn gleichwinkliche Parallelepipeden sind im zusammengesezten Verhältnis ihrer Grundflächen und Höhen (E. nach Bürmanns Ausg. XI, 40 Schol).

**) Denn das Verhältnis $AB^c : BC^c$ ist das triplicirte von $AB : BC$ (E. XI, 23) aber das Verhältnis der einen Oberfläche zur andern ist das duplicirte von $AB : BC$; folglich ist $AB^c : BC^c$ das veranderthalbfachte von dem der einen Oberfläche zur andern. Eut.

Da $BE = ED$, so ist $BFD < BED$ (E. II, 5.). Folgl. $FB : BE < \begin{Bmatrix} ED:DF \\ HB:BF \end{Bmatrix}$ *); daher $FB^q < \begin{Bmatrix} HBE \\ HBK \end{Bmatrix}$.

Es sey $BN^q = HBK$. So ist $HB : BK = HN^q : NK^q$ **)

Aber es ist $HF^q : FK^q > HN^q : NK^q$ **)

folglich auch $HF^q : FK^q > \begin{Bmatrix} HB : BK \\ KF : FG \end{Bmatrix}$,"

und daher das Verhältnis $HF : FG >$ das veranderthalbfachte von $KF : FG$ ****).

Nun ist $HF : FG =$ Kegel AHC : Kegel $AGC =$ Abschnitt ABC : Abschnitt ADC,

und $KF : FG = FB : FD =$ Oberfläche des Abschn. ABC : Oberfl. des Absch. ADC.

Folglich hat der grössere Abschnitt zum kleinern ein kleineres Verhältnis als der duplicirte von dem, welches die Oberfläche des grössern Abschnitts zur Oberfläche des kleinern hat, ein grösseres aber als das veranderthalbfachte von demselben.

Anders: (*Fig. 49.*)

Es sey eine Kugel, in welcher $ABCD$ ein gröster Kreis, AC ein Durchmesser, E der Mittelpunkt sey; und sie sey von einer durch BD gehenden auf AC senkrechten Ebene geschnitten. Ich behaupte, dafs der grössere Abschnitt DAB zum kleinern BCD ein kleineres Verhältnis als das duplicirte von dem, welches die Oberfläche des Abschnitts ABD zur Oberfläche des Abschnitts BCD hat, ein grösseres aber als das veranderthalbfachte habe.

Denn man ziehe AB, BC. Das Verhältnis der ersten Oberfläche zur andern ist das des Kreises, dessen

---

*) Weil BFD : BE × FD < BED : BE × FD, und E. VI, 1. Allgemein; wenn A, B, C, D, vier gerade Linien sind, und A × D > B × C, so ist A : B > C : D; und umgekehrt. Und wenn A × C > Bq, so ist A : B > B : C, u. umg. Eut.

**) Denn es ist HB : BN = BN : BK (E. VI, 17.) = HN : NK (E. V, 12.), folglich HB : BK = HBq : BNq = HNq : NKq (E. VI, 20. 22.). Eut.

***) Weil FB < NB, FK < NK, folglich HK : KF > HK : KN, und verbunden HF : FK > HN : NK, und duplicirt. Eut.

****) Man nehme M, KF, N, FG stetig proportionirt. So ist das Verhältnis M : FG das veranderthalbfachte von dem KF : FG, und Mq : KFq = KF : FG (E. VI, 20. 22.). Aber HFq : KFq > KF : FG, also > Mq : KFq, und HF > M. Daher das Verhältnis HF : FG > M : FG d. i. > das veranderthalbfachte von dem KF : FG. Eut.

Halbm. AB, zum Kreis, dessen Halbm. BC, das ist, das von AH zu HC. Man seze AF, CG dem Halbm. des Kreises gleich. Das Verhältnis des Abschnitts BAD zu dem BCD ist zusammengesezt aus dem, welches der Abschnitt BAD zum Kegel hat, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser BD und dessen Spize der Punkt A ist, und eben dieser Kegel zum Kegel, der die nämliche Grundfläche und den Punkt C zur Spize hat, und dieser leztgedachte Kegel zum Abschnitte BCD. Aber

der Abschnitt BAD:Kegel $BAD = GH:HC$ (B.II. S. III.Zns.)
Kegel BAD:Kegel $BCD = AH:HC$ (B. I. Lehns. 1)
Kegel BCD:Abschn.$BCD = AH:HF$ (B.II. S. IIIZus.)

Das aus den Verhältnissen $GH:HC$, $AH:HC$ zusammengesezte Verhältnis aber ist das $GHA:HC^q$ (E. VI, 23.), und das aus $GHA:HC^q$, $AH:HF$ zusammengesezte ist das des rechtwinklichen Parallelepipedums $GHA \times HA : HC^q \times HF$ *), welches $= GH \times HA^q : HC^q \times HF$. Aber

$$GH \times HA^q : HC^q \times HG = HA^q : HC^q \quad \text{(E.XI, 32).}$$

Da nun $GH \times HA^q : HC^q \times HF < AH : HC$ duplicirt, d. i. $< HA^q : HC^q$ seyn soll;

so muss $GH \times HA^q : HC^q \times HF < GH \times HA^q : HC^q \times HG$ (E. XI, 32),

folglich $HC^q \times HF > HC^q \times HG$, $HF > HG$ seyn; (welches richtig ist).

Ich behaupte nun auch, dass der grössere Abschnitt zum kleinern ein grösseres Verhältnis habe als das veranderthalbfachte von dem, welches die Oberfläche des ersten zur Oberfläche des andern hat.

Das Verhältnis des einen Abschnitts zum andern ist vermöge des bewiesenen $= GH \times HA^q : HC^q \times HF$; das veranderthalbfachte Verhältnis der einen Oberfläche zur andern aber ist $= AB^c : BC^c$ **). Es wird also behauptet: dass $GH \times HA^q : HC^q \times HF > AB^c : BC^c$; d. i. $> AH^c : BH^c$ (E. VI, 8. XI, 37.) d. i. $>$ das aus $AH^r : BH^q$ und

*) Denn gleichwinkliche Parallelepipeden sind im zusammengesezten Verhältnis ihrer Grundflächen und Höhen (E. nach Bürmanns Ausg. XI, 40 Schol).

**) Denn das Verhältnis $AB^c : BC^c$ ist das triplicirte von $AB : BC$ (E. XI, 23) aber das Verhältnis der einen Oberfläche zur andern ist das duplicirte von $AB : BC$; folglich ist $AB^c : BC^c$ das veranderthalbfachte von dem der einen Oberfläche zur andern. Eut.

$AH : HB$ zusammengesezte Verhältnis. Aber das aus $AH : BH$q und $AH : HB$ zusammengesezte Verhältnis ist $= AH$q$: CHB$ *) $= GH \times HA$q$: BHC \times GH$. Es wird also behauptet, dass $GH \times HA$q$: HCq \times HF > GH \times HAq : BHC \times GH$. Demnach ist zu beweisen, dass HCq$ \times HF < BHC \times GH$ **), welches ebenso viel ist als beweisen, dass HCq$: BHC < GH : HF$, mithin dass $GH : HF > CH : HB$. Man errichte in E auf EC die EK senkrecht, und fälle von B auf EK das Loth BL. Nun ist zu zeigen, dass $GH : HF > CH : HB$. Es ist aber $HF = AH + KE$. Folglich ist zu zeigen, dass $GH : HA + KE > CH : HB$; Und wenn man CH von GH, $EL = BH$ von KE wegnimmt, dass die übrige CG d. i. KE zur übrigen $AH + KL > CH : HB$ (E. V, 19) d. i. $> BH : HA$ d. i. $> LE : AH$, Und *verwechselt*, dass $KE : EL > AH + KL : AH$, und *getrennt* dass $KL : LE > KL : AH$; mithin dass $LE < AH$; (welches richtig ist.)

Satz X. Fig. 50.

Unter allen von gleicher Oberfläche eingeschlossenen Kugelabschnitten ist die Halbkugel die gröste.

Es sey in einer Kugel ein gröster Kreis $ABCD$, dessen Durchmesser AC; und eine andere Kugel, in der ein gröster Kreis $EFGH$, EG ein Durchmesser sey. Die eine Kugel werde von einer durch den Mittelpunkt gehenden, die andere von einer nicht durch den Mittelpunkt gehenden Ebene geschnitten. Die schneidenden Ebenen seyen auf den Durchmessern AC, EG senkrecht, und die Linien BD, FH ihre Durchschnitte. Der durch den Bogen FEH gehende Kugelabschnitt ist nun eine Halbkugel, der durch den Bogen BAD gehende aber in der einen Figur bey S grösser als eine Halbkugel, in der andern kleiner. Es seyen die Oberflächen gedachter Abschnitte gleich. Ich behaupte, dass die Halbkugel durch FEH grösser sey als der Abschnitt durch den Bogen BAD.

Weil die Oberflächen der gedachten Abschnitte gleich sind, so ist $BA = EF$; denn die Oberfläche jedes Abschnitts

*) Denn AHq : BHq = AH : HC (E. VI, 8. 20.); und das aus AH : HC, AH : HB zusammengesezte Verhältnis ist = AHq : CHB (E. VI, 23).

**) Mithin HCq×HF < BHC×HF < BHC×GH : BHC×HF.

ist einem Kreise gleich bewiesen worden, dessen Halbmesser der von dem Scheitel des Abschnitts an die Peripherie des Kreises, welcher des Abschnitts Grundfläche ist, gezogenen geraden Linie gleich ist (B. I. S. III., 1L). Und da der Bogen BAD in der einen Figur bey S grösser als ein Halbkreis, (in der andern kleiner) ist, so ist ABq ($= EFq = 2ELq$, in der ersten) $< 2AKq$ * und $>$ 2mal Quadrat des Halbmessers **; (in der andern $> 2AKq$ * und $<$ 2mal Quadrat des Halbmessers ***. Man schneide $AR = EL$ von AC ab; so wird in beyden Figuren der Punkt R zwischen den Mittelpunkt und den Punkt K fallen.) Dem Halbmesser des Kreises ABD sey die CO gleich, und $CO : CK = MA : AK$, und auf dem Kreis um den Durchmesser BD sey ein Kegel beschrieben, der den Punkt M zur Spize hat. Dieser ist dem durch den Bogen BAD gehenden Kugelabschnitt gleich ****) (B. II, S. III.). Ferner sey $EN = EL$, und auf dem Kreis um den Durchmesser HF ein Kegel beschrieben, der den Punkt N zur Spize hat. Dieser ist der durch den Bogen FEL gehenden Halbkugel gleich †).

Nun ist das Rechtek $CRA > CKA$ (E. II, 5 Cor.), da die kleinere Seite des ersten grösser als die kleinere des lezten ist;

aber $ARq = AK \times CO$, nämlich jedes $= \frac{1}{2} ABq$ (E. I, 47. VI, 8, 17.);

folglich $CRA + ARq$ d. i. CAR (E. II, 3.) $> OC \times KA + CKA$ d. i. OKA (E. II, 1.). Aber $OKA = MKC$ ****). Folglich $CAR > MKC$, und

$AC : CK > MK : AR$ ††)

Nun ist $AC : CK = ABq : BKq$ (E. VI, 8. 20. Cor.)

---

*) Nämlich $= AKq + BKq$; und BK ist $< AK$ in der ersten, aber $> AK$ in der andern (E. III. 7.). Eut.

**) Vermöge E. II, 12; weil, wenn BP an den Mittelpunkt P gezogen wird, der Winkel BPA stumpf ist. Eut.

***) Vermöge E. II, 13; weil hier der Winkel BPA spizig ist. Eut.

****) Denn da $CO : CK = MA : AK$, so ist verbunden $OK : KC = MK : KA$.

†) Denn er ist das Doppelte von dem Kegel, der die nämliche Grundfläche und den Punkt E zur Spize hat (B. I, Lehns. 1.); aber auch die Halbkugel ist das Doppelte vom nämlichen Kegel (B. I, S. XXXVI.).

††) S. Anm. *) Seite 96.

Folglich $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}ABq\\ ARq\end{matrix}\right\} : BKq \geqslant MK : \left\{\begin{matrix}2AR\\ LN\end{matrix}\right\}$,

u. Kreis um den Durchmesser FH: Kreis um d. Durchmesser $BD \geqslant MK : LN$. Folglich der Kegel, der den Kreis um den Durchmesser FH zur Grundfläche und den Punkt N zur Spize hat, grösser als der Kegel, welcher den Kreis um den Durchmesser BD zur Grundfläche und den Punkt M zur Spize hat *); Mithin auch die Halbkugel durch EFH grösser als der Kugelabschnitt durch den Bogen BAD.

*) Denn es sey Kreis um FH : Kreis um BD = MK : LQ; so ist LQ < LN; und der Kegel, der den Kreis um BD zur Grundfläche, M zur Spize hat, dem Kegel gleich, der den Kreis um FH zur Grundfläche, und LQ < LN zur Höhe hat (S. 1 Lehrs. 4). Eut.

Archimeds Kreismessung.

Satz I. Fig. 59.

Jeder Kreis ist einem rechtwinklichen Dreyek gleich, dessen eine Seite um den rechten Winkel dem Halbmesser und die andere dem Umfang des Kreises gleich ist.

Es sey der Kreis *ABCD* (und das Dreyek *E* von der genannten Beschaffenheit). Ich behaupte, dass der Kreis dem Dreyek gleich sey.

Denn der Kreis sey grösser, wenns möglich ist. Man beschreibe in denselben das Quadrat *AC* und halbire die Bögen, bis die Summe der Abschnitte kleiner ist als der Ueberschuss des Kreises über das Dreyek (E. XII, 2.) So ist die geradliniche Figur noch grösser als das Dreyek. Man nehme den Mittelpunkt *N* und das Loth *NO*. So ist *NO* kleiner als die Seite des Dreyeks. Aber auch der Umfang der geradlinichen Figur ist kleiner als dessen andere Seite; er ist nämlich kleiner als der Umfang des Kreises (B. I. über Kug. und Cyl. S. I.) Folglich ist die geradliniche Figur auch kleiner als das Dreyek; welches ungereimt ist.

Es sey aber, wenns möglich ist, der Kreis kleiner als das Dreyek *E*. Man beschreibe um denselben ein Quadrat, halbire die Bögen, und ziehe Tangenten an die Theilungspunkte. So ist *PAR* ein rechter Winkel; mithin $PR > RM$, denn $RM = RA$. Folglich ist das Dreyek *RPQ* grösser als die Hälfte der Figur *PFAM*. Nun seyen Abschnitte wie der *QFA* übrig gelassen, die zusammen kleiner seyen als der Ueberschuss des Dreyeks *E* über den Kreis *ABCD* (E. X, 1.) So ist die um den Kreis beschriebene geradliniche Figur noch kleiner als das Dreyek *E*. Welches ungereimt ist; denn sie muss grösser seyn, weil *NA* zwar der Perpendicularseite des Dreyeks

gleich, der Umfang der Figur aber grösser ist als dessen Grundlinie (B. I. üb. Kug. und Cyl. S. II.).

Der Kreis ist also dem Dreyek *E* gleich *).

---

*) ***Folgerungen.***

1. Jeder Kreis verhält sich zum Quadrat seines Durchmessers wie seine Peripherie zum Vierfachen seines Durchmessers.

Denn es sey des Kreises (Fig. 60) Durchmesser AB, CG das Quadrat dieses Durchmessers, CF dem Umfang oder der Peripherie des Kreises gleich. So ist Kreis um AB : CG = Δ AFC : 4 Δ ADC = CF : 4 CD (E. VI. 1. V, 4)

2. Die Peripherien der Kreise verhalten sich wie ihre Durchmesser.

Es seyen P, p die Peripherien, D, d die Durchmesser zweyer Kreise. Da der erste zum Quadrat seines Durchmessers sich verhält wie der andere zum Quadrat des seinen (E. XII, 2. V, 16); so ist (Folg. 1) P : 4D² = p : 4d², und verwechselt P : p = 4D² : 4d² = D² : d².

Dis wird unmittelbar aus S. I, II, IV des I B. üb. K. u. C. so bewiesen: (Fig. 65) Die Peripherien der Kreise A, B verhalten sich wie ihre Durchmesser CD, EF.

Denn es verhalte sich, wenns möglich ist, wie CD zu EF, so die Peripherie des Kreises A zu einer Länge EG, die grösser sey, als die Peripherie des Kreises B. Man beschreibe in und um den Kreis B ähnliche reguläre Vieleke, so dass die Seite des darum beschriebenen zur Seite des darein beschriebenen ein kleineres Verhältniss habe als EG zur Peripherie von B (B. I. üb. K. u. C. S. IV.); so hat auch der Umfang des darum beschriebenen zum Umfang des darein beschriebenen (E. V, 16), und noch viel mehr zur Peripherie von B ein kleineres Verhältnis als EG zur Peripherie von B hat; mithin ist der Umfang des darum beschriebenen < EG. Man beschreibe um den Kreis A ein den genannten ähnliches Vielek; so verhält sich der Umfang des um A beschriebenen zum Umfang des um B wie CD zu EF (E. XII, 1 Bew.) Aber wie CD zu EF; so verhält sich die Peripherie von A zu EG. Folglich verhält sich der Umfang des Vieleks von A zum Umfang des um B wie die Peripherie von A zu EG. Und der Umfang des Vieleks um B ist < EG nach dem bewiesenen. Folglich ist der Umfang des Vieleks um A kleiner als die Peripherie von A. Welches unmöglich ist (B. I. üb. K. u. C. S. II). Also kan nicht wie CD zu EF, so die Peripherie des Kreises A sich zu einer Länge verhalten, die grösser ist als die Peripherie des Kreises B.

Aber auch nicht zu einer kleinern. Denn man seze, sie verhalte sich so zu EH, welche kleiner sey als die Peripherie des Kreises B. Man beschreibe wieder in und um den Kreis B ähnliche reguläre Vieleke, so dass die Seite des darum zur Seite des darein beschriebenen ein kleineres Verhält-

Satz II. Fig. 60.

Der Kreis verhält sich zum Quadrat seines Durchmessers sehr nahe wie 11 zu 14.

---

nis habe als die Peripherie von B zu EH. So hat auch der Umfang des um B beschriebenen Vielecks und noch viel mehr die Peripherie von B zum Umfang des darein beschriebenen ein kleineres Verhältnis als die Peripherie von B zu EH; mithin ist der Umfang des in B beschriebenen Vielecks > EH. Man beschreibe in den Kreis A ein den genannten ähnliches Vielek. So ist Umfang des Vielecks in A : Umfang des Vielecks in B = CD : EF d. i. = Peripherie von A : EH. Und der Umfang des Vielecks in B ist > EH. Folglich auch der Umfang des Vielecks in A > Peripherie von A. Welches unmöglich ist (S. 1 des 1 B. üb. K. u. C.)

Folglich wie CD zu EF, so verhält sich die Peripherie des Kreises A zur Peripherie des Kreises B.

3. Jeder Kreisausschnitt ist einem rechtwinklichen Dreyek gleich, von dessen Seiten um den rechten Winkel die eine dem Halbmesser des Kreises, die andere der Länge des Bogens des Ausschnitts gleich ist.

Fig. 66. Es sey ein Kreisausschnitt CAD, und das rechtwinkliche Dreyek CAE, dessen Seite CA dem Halbmesser, AE der Länge des Bogens des Ausschnitts gleich sey. Dieses Dreyek ist dem Ausschnitt gleich.

Denn es sey AB der Peripherie des Kreises gleich; so ist das Dreyek CAB dem Kreise gleich. Nun ist
Ausschnitt CAD : Viertel des Kreises = Bogen AD : $\frac{1}{4}$ Periph. (E. VI, 33).
Daher auch Ausschnitt CAD : Kreise = Bogen AD : Peripherie, d. i. = EΔ : AB = Δ CAE : Δ CAB. Und der Kreis ist = Δ CAB. Folglich der Ausschnitt CAD = Δ CAE.

4. *Fig. 67.* Ein von den Peripherien (*Aa Bb*, *Ee Dd*) zweyer concentrischen Kreise eingeschlossener ebener Raum (ein *Ring*) ist einem Rchk gleich, dessen eine Seite dem halben Unterschied der Durchmesser dieser Kreise $\left(\frac{AB-DE}{2}\right)$, die andere der Peripherie des Kreises gleich ist, dessen Durchmesser der halben Summe der nämlichen Durchmesser $\left(\frac{AB+DE}{2}\right)$ gleich ist.

Man halbire DB in G und beschreibe aus dem Mittelpunkt C mit dem Halbm. CG den Kreis FfGg; so ist FG = $\frac{AB+DE}{2}$. Es sey BH = der Peripherie AaBb auf AB senkrecht, und GK, DI der BH parallel schneiden die CH in K, I. So wird GK der Peripherie FfGg gleich seyn: denn GK verhält sich zu BH wie CG : CB d. i. AB : FG, und ebenso verhält sich die Peripherie FfGg zu BH

Da $BE = ED$, so ist $BFD < BED$ (E. II, 5.). Folgl. $FB : BE < \left\{\begin{matrix} ED : DF \\ HB : BF \end{matrix}\right\}$ *); daher $FB^q < \left\{\begin{matrix} HBE \\ HBK \end{matrix}\right\}$.

Es sey $BN^q = HBK$. So ist $HB : BK = HN^q : NK^q$ **)

Aber es ist $HF^q : FK^q > HN^q : NK^q$ **)

folglich auch $HF^q : FK^q > \left\{\begin{matrix} HB : BK \\ KF : FG \end{matrix}\right\}$ ***)

und daher das Verhältnis $HF : FG >$ das veranderthalbfachte von $KF : FG$ ****).

Nun ist $HF : FG =$ Kegel AHC : Kegel $AGC =$ Abschnitt ABC : Abschnitt ADC,

und $KF : FG = FB : FD =$ Oberfläche des Abschn. ABC : Oberfl. des Absch. ADC.

Folglich hat der grössere Abschnitt zum kleinern ein kleineres Verhältnis als der duplicirte von dem, welches die Oberfläche des grössern Abschnitts zur Oberfläche des kleinern hat, ein grösseres aber als das veranderthalbfachte von demselben.

Anders: (*Fig. 49.*)

Es sey eine Kugel, in welcher $ABCD$ ein gröster Kreis, AC ein Durchmesser, E der Mittelpunkt sey; und sie sey von einer durch BD gehenden auf AC senkrechten Ebene geschnitten. Ich behaupte, dafs der grössere Abschnitt DAB zum kleinern BCD ein kleineres Verhältnis als das duplicirte von dem, welches die Oberfläche des Abschnitts ABD zur Oberfläche des Abschnitts BCD hat, ein grösseres aber als das veranderthalbfachte habe.

Denn man ziehe AB, BC. Das Verhältnis der ersten Oberfläche zur andern ist das des Kreises, dessen

---

*) Weil BFD : BE × FD < BED : BE × FD, und E. VI, 1. Allgemein; wenn A, B, C, D, vier gerade Linien sind, und A × D > B × C, so ist A : B > C : D; und umgekehrt. Und wenn A × C > Bq, so ist A : B > B : C, u. umg. Eut.

**) Denn es ist HB : BN = BN : BK (E. VI, 17.) = HN : NK (E. V, 12.), folglich HB : BK = HBq : BNq = HNq : NKq (E. VI, 20. 22.). Eut.

***) Weil FB < NB, FK < NK, folglich HK : KF > HK : KN, und verbunden HF : FK > HN : NK, und duplicirt. Eut.

****) Man nehme M, KF, N, FG stetig proportionirt. So ist das Verhältnis M : FG das veranderthalbfachte von dem KF : FG, und Mq : KFq = KF : FG (E. VI, 20. 22.). Aber HFq : KFq > KF : FG, also > Mq : KFq, und HF > M. Daher das Verhältnis HF : FG > M : FG d. i. > das veranderthalbfachte von dem KF : FG. Eut.

Halbm. AB, zum Kreis, dessen Halbm. BC, das ist, das von AH zu HC. Man seze AF, CG dem Halbm. des Kreises gleich. Das Verhältnis des Abschnitts BAD zu dem BCD ist zusammengesezt aus dem, welches der Abschnitt BAD zum Kegel hat, dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser BD und dessen Spize der Punkt A ist, und eben dieser Kegel zum Kegel, der die nämliche Grundfläche und den Punkt C zur Spize hat, und dieser leztgedachte Kegel zum Abschnitte BCD. Aber

der Abschnitt BAD:Kegel $BAD = GH:HC$ (B.II. S. III.Zus.)
Kegel BAD:Kegel $BCD = AH:HC$ (B. I. Lehns. 1)
Kegel BCD:Abschn.$BCD = AH:HF$ (B.II. S. IIIZus.)

Das aus den Verhältnissen $GH:HC$, $AH:HC$ zusammengesezte Verhältnis aber ist das $GHA:HC^q$ (E. VI, 23.), und das aus $GHA:HC^q$, $AH:HF$ zusammengesezte ist das des rechtwinklichen Parallelepipedums $GHA \times HA : HC^q \times HF$ *), welches $= GH \times HA^q : HC^q \times HF$. Aber

$$GH \times HA^q : HC^q \times HG = HA^q : HC^q \quad \text{(E.XI, 32).}$$

Da nun $GH \times HA^q : HC^q \times HF < AH : HC$ duplicirt, d. i. $< HA^q : HC^q$ seyn soll;

so muss $GH \times HA^q : HC^q \times HF < GH \times HA^q : HC^q \times HG$ (E. XI, 32),

folglich $HC^q \times HF > HC^q \times HG$, $HF > HG$ seyn; (welches richtig ist).

Ich behaupte nun auch, dass der grössere Abschnitt zum kleinern ein grösseres Verhältnis habe als das veranderthalbfachte von dem, welches die Oberfläche des ersten zur Oberfläche des andern hat.

Das Verhältnis des einen Abschnitts zum andern ist vermöge des bewiesenen $= GH \times HA^q : HC^q \times HF$; das veranderthalbfachte Verhältnis der einen Oberfläche zur andern aber ist $= AB^c : BC^c$ **). Es wird also behauptet: dass $GH \times HA^q : HC^q \times HF > AB^c : BC^c$; d. i. $> AH^c : BH^c$ (E. VI, 8. XI, 37.) d. i. $>$ das aus $AH^q : BH^q$ und

*) Denn gleichwinkliche Parallelepipeden sind im zusammengesezten Verhältnis ihrer Grundflächen und Höhen (E. nach Bürmanns Ausg. XI, 40 Schol).

**) Denn das Verhältnis $AB^c : BC^c$ ist das triplicirte von $AB : BC$ (E. XI, 23) aber das Verhältnis der einen Oberfläche zur andern ist das duplicirte von $AB : BC$; folglich ist $AB^c : BC^c$ das veranderthalbfachte von dem der einen Oberfläche zur andern. Eut.

$AH : HB$ zusammengesezte Verhältnis. Aber das aus $AH : BH$q und $AH : HB$ zusammengesezte Verhältnis ist $= AH$q$: CHB$ *) $= GH \times HA$q$: BHC \times GH$. Es wird also behauptet, dass $GH \times HA$q$: HCq \times HF > GH \times HAq : BHC \times GH$. Demnach ist zu beweisen, dass HCq$ \times HF < BHC \times GH$ **), welches ebenso viel ist als beweisen, dass HCq$: BHC < GH : HF$, mithin dass $GH : HF > CH : HB$. Man errichte in E auf EC die EK senkrecht, und fälle von B auf EK das Loth BL. Nun ist zu zeigen, dass $GH : HF > CH : HB$. Es ist aber $HF = AH + KE$. Folglich ist zu zeigen, dass $GH : HA + KE > CH : HB$; Und wenn man CH von GH, $EL = BH$ von KE wegnimmt, dass die übrige CG d. i. KE zur übrigen $AH + KL > CH : HB$ (E. V, 19) d. i. $> BH : HA$ d. i. $> LE : AH$, Und *verwechselt*, dass $KE : EL > AH + KL : AH$, und *getrennt* dass $KL : LE > KL : AH$; mithin dass $LE < AH$; (welches richtig ist.)

Satz X. Fig. 50.

Unter allen von gleicher Oberfläche eingeschlossenen Kugelabschnitten ist die Halbkugel die gröste.

Es sey in einer Kugel ein gröster Kreis $ABCD$, dessen Durchmesser AC; und eine andere Kugel, in der ein gröster Kreis $EFGH$, EG ein Durchmesser sey. Die eine Kugel werde von einer durch den Mittelpunkt gehenden, die andere von einer nicht durch den Mittelpunkt gehenden Ebene geschnitten. Die schneidenden Ebenen seyen auf den Durchmessern AC, EG senkrecht, und die Linien BD, FH ihre Durchschnitte. Der durch den Bogen FEH gehende Kugelabschnitt ist nun eine Halbkugel, der durch den Bogen BAD gehende aber in der einen Figur bey S grösser als eine Halbkugel, in der andern kleiner. Es seyen die Oberflächen gedachter Abschnitte gleich. Ich behaupte, dass die Halbkugel durch FEH grösser sey als der Abschnitt durch den Bogen BAD.

Weil die Oberflächen der gedachten Abschnitte gleich sind, so ist $BA = EF$; denn die Oberfläche jedes Abschnitts

*) Denn AHq : BHq = AH : HC (E. VI, 8. 20.); und das aus AH : HC, AH : HB zusammengesezte Verhältnis ist = AHq : CHB (E. VI, 23).

**) Mithin HCq×HF < BHC×HF < BHC×GH : BHC×HF.

ist einem Kreise gleich bewiesen worden, dessen Halbmesser der von dem Scheitel des Abschnitts an die Peripherie des Kreises, welcher des Abschnitts Grundfläche ist, gezogenen geraden Linie gleich ist (B. I. S. III., IL). Und da der Bogen BAD in der einen Figur bey S grösser als ein Halbkreis, (in der andern kleiner) ist, so ist ABq ($= EF$q $= 2EL$q, in der ersten) $< 2AK$q *) und $>$ 2mal Quadrat des Halbmessers **); (in der andern $> 2AK$q *) und $<$ 2mal Quadrat des Halbmessers ***). Man schneide $AR = EL$ von AC ab; so wird in beyden Figuren der Punkt R zwischen den Mittelpunkt und den Punkt K fallen.) Dem Halbmesser des Kreises ABD sey die CO gleich, und $CO : CK = MA : AK$, und auf dem Kreis um den Durchmesser BD sey ein Kegel beschrieben, der den Punkt M zur Spize hat. Dieser ist dem durch den Bogen BAD gehenden Kugelabschnitt gleich ****) (B. II, S. III.). Ferner sey $EN = EL$, und auf dem Kreis um den Durchmesser HF ein Kegel beschrieben, der den Punkt N zur Spize hat. Dieser ist der durch den Bogen FEL gehenden Halbkugel gleich †).

Nun ist das Rechtek $CRA > CKA$ (E. II, 5 Cor.), da die kleinere Seite des ersten grösser als die kleinere des lezten ist;

aber ARq $= AK \times CO$, nämlich jedes $= \frac{1}{2} AB$q (E. I, 47. VI, 8. 17.);

folglich $CRA + AR$q d. i. CAR (E. II, 3.) $> OC \times KA + CKA$ d. i. OKA (E. II, 1.). Aber $OKA = MKC$ ****).

Folglich $CAR > MKC$, und

$AC : CK > MK : AR$ ††)

Nun ist $AC : CK = AB$q $: BK$q (E. VI, 8. 20. Cor.)

---

*) Nämlich $=$ AKq $+$ BKq; und BK ist $<$ AK in der ersten, aber $>$ AK in der andern (E. III. 7.). Eut.

**) Vermöge E. II, 12; weil, wenn BP an den Mittelpunkt P gezogen wird, der Winkel BPA stumpf ist. Eut.

***) Vermöge E. II, 13; weil hier der Winkel BPA spizig ist. Eut.

****) Denn da CO : CK $=$ MA : AK, so ist verbunden OK : KC $=$ MK : KA.

†) Denn er ist das Doppelte von dem Kegel, der die nämliche Grundfläche und den Punkt E zur Spize hat (B. I, Lehns. 1.); aber auch die Halbkugel ist das Doppelte vom nämlichen Kegel (B. I, S. XXXVI.).

††) S. Anm. *) Seite 96.

Noch sey KAC durch LA halbirt. So ist [13]) $AL:LC < 2016\frac{1}{6} : 66$, $AC : CL < 2017\frac{1}{4} : 66$. Folglich *umgekehrt* $LC : CA > 66 : 2017\frac{1}{4}$, und der Umfang des Vieleks : Durchmesser $> 6336 : 2017\frac{1}{4}$. Jenes ist $> 3\frac{10}{71} \times 2017\frac{1}{4}$. Folglich ist der Umfang des Sechsundneunzigeks im Kreise mehr als dreymal der Durchmesser und $\frac{10}{71}$ desselben. Mithin ist noch vielmehr der Kreis das Dreyfache des Durchmessers und mehr als $\frac{10}{71}$ desselben.

Demnach ist der Umfang des Kreises das Dreyfache vom Durchmesser und noch drüber weniger als $\frac{1}{7}$, aber mehr als $\frac{10}{71}$ desselben.

---

13) Fgl. $AC+AK:CK$ d. i. $AL:LC < 2016\frac{1}{6} : 66$;

$AL\square : LC\square < 4064928\frac{1}{36} : 4356$

Verb. $AC\square : LC\square < 4069284\frac{1}{36} : 4356 < \left(4069297\frac{1}{2}\frac{1}{16}\right.$ d. i. $\left.\overline{2017\frac{1}{4}}^2 : \overline{66}^2\right)$.

$AC : CL < 2017\frac{1}{4} : 66$.

Archimeds Kreismessung.

Saz I. Fig. 59.

Jeder Kreis ist einem rechtwinklichen Dreyek gleich, dessen eine Seite um den rechten Winkel dem Halbmesser und die andere dem Umfang des Kreises gleich ist.

Es sey der Kreis *ABCD* (und das Dreyek *E* von der genannten Beschaffenheit). Ich behaupte, dass der Kreis dem Dreyek gleich sey.

Denn der Kreis sey grösser, wenns möglich ist. Man beschreibe in denselben das Quadrat *AC* und halbire die Bögen, bis die Summe der Abschnitte kleiner ist als der Ueberschuss des Kreises über das Dreyek (E. XII, 2.) So ist die geradliniche Figur noch grösser als das Dreyek. Man nehme den Mittelpunkt *N* und das Loth *NO*. So ist *NO* kleiner als die Seite des Dreyeks. Aber auch der Umfang der geradlinichen Figur ist kleiner als dessen andere Seite; er ist nämlich kleiner als der Umfang des Kreises (B. I. über Kug. und Cyl. S. I.) Folglich ist die geradliniche Figur auch kleiner als das Dreyek; welches ungereimt ist.

Es sey aber, wenns möglich ist, der Kreis kleiner als das Dreyek *E*. Man beschreibe um denselben ein Quadrat, halbire die Bögen, und ziehe Tangenten an die Theilungspunkte. So ist *PAR* ein rechter Winkel; mithin $PR > RM$, denn $RM = RA$. Folglich ist das Dreyek *RPQ* grösser als die Hälfte der Figur *PFAM*. Nun seyen Abschnitte wie der *QFA* übrig gelassen, die zusammen kleiner seyen als der Ueberschuss des Dreyeks *E* über den Kreis *ABCD* (E. X, 1.) So ist die um den Kreis beschriebene geradliniche Figur noch kleiner als das Dreyek *E*. Welches ungereimt ist; denn sie muss grösser seyn, weil *NA* zwar der Perpendicularseite des Dreyeks

„nem (Prisma, Cylinder) aber, (das, der) die grössere Grundfläche des Rumpfes zur Grundfläche und gleiche „Höhe mit ihm hat; wie die drey genannten stetigen Proportionallinien zusammen, zum Dreyfachen (der Seite des Durchmessers) der grösseren Grundfläche.

„Es sey ein Rumpf *ABCFGH*, ein Stük (der Pyramide des Kegels) „*ABCD*, (deren dessen) Grundfläche (das Dreyek der Kreis) *ABC*, die Axe*) „*DE* ist. Es sey *AC*: *FH* = *FH*: *NO*; und *EK* die Axe „des Rumpfes *), und ebenfalls (der Pyramide des Kegels) *ABCK*; so „dass ihre Höhe die nämliche sey. Ich behaupte, dass der „Rumpf *ABCFGH* (zur Pyramide zum Kegel) *ABCK* sich verhalte, wie „die drey geraden Linien *AC*, *FH*, *NO* zusammen zu „*AC*: zum (Prisma Cylinder) aber, (welches welcher) *ABC* zur Grundfläche „und einerley Höhe mit dem Rumpf hat, wie die drey „*AC*, *FH*, *NO* zum Dreyfachen von *AC*.

„Denn wie *AC*: *FH*, *FH*: *NO*, so sey *NO*: *P*; und „die Unterschiede dieser vier geraden Linien seyen *AL*, „*FM*, *OQ*. So ist *AL*: *FM* = *FM*: *OQ* = *AC*: *FH* (§. 1.). „Da nun *AC*: *P* = (Pyramide Kegel) *ABCD*: ähnl. (Pyr. Keg.) *DFGH*, weil diese im triplicirten Verhältnis ihrer (homologen Seiten messer) sind (E. XII, 8. 12.); so ist „*getrennt* *AL* + *FM* + *OQ*: *P* = Rumpf *ABCFGH*: (Pyr. Keg.) *ABCD*.

„Ferner weil die Axe *DE* und die Seiten (der Pyr. des Keg.) von der „der Grundfläche *ABC* parallelen Ebene des (Dreyeks Kreises) *FGH* „geschnitten werden; so ist (E. XI, 17.).

---

*) *Axe einer Pyramide* nennt er die gerade Linie von der Spize der Pyramide an den Schwerpunkt der Grundfläche, d. i. wenn die Grundfläche ein Dreyek ist, an den Punkt, wo die von den Winkeln des Dreyeks an die Mitten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen geraden Linien sich durchkreuzen; *Axe des Rumpfes einer Pyramide* die gerade Linie, welche die Schwerpunkte der entgegengesezten Grundflächen verbindet (Lib. I. Def. VI.).

„verbunden $AD:DF$ d. i. $AC:FH$ wegen Aehnl. d. i. $AC:CL$ der Dreyeke $\}=DE:DK$,
„u. zurükk. $AC:AL=DE:EK$
„Aber $DE:EK=(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})ABCD:(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})ABCK$;

„folglich $AC:AL=(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})ABCD:(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})ABCK$.
„Nun war $AL+FM+OQ:AC=\text{Rpf}ABCFGH:(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})ABCD$;

„also *glf.* $AL+FM+OQ:AL=$Rumpf $ABCFGH:(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})ABCK$
„Und da die drey Unterschiede AL, FM, OQ stetig pro-
„portionirt sind im Verhältnis eben so vieler Glieder AC,
„FH, NO; so ist $AL+FM+OQ:AL=AC+FH+$
„$NO:AC$.
„Nun war $AL+FM+OQ:AL=$Rpf $ABCFGH:(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})ABCK$;
„Folglich $AC+FH+NO:AC=$Rpf $ABCFGH:(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})ABCK$.
„Aber $AC:3AC=(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})ABCK:(\text{Prisma}_{\text{Cylinder}})$, dessen Grundfläche ABC, und dessen Höhe einerley mit der $(\text{der Pyr.}_{\text{des Keg.}})$ $ABCK$.

„Also *gleichf.* $AC+FH+NO:3AC=$Rumpf $ABCFGH:(\text{Prisma, das}_{\text{Cylinder, der}})$ ABC zur Grundfläche und mit d. $(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})$ $ABCK$, d. i. mit dem Rumpf $ABCFGH$ einerley Höhe hat.“

§. 3. Es verhält sich $AC+FH+NO:AC$ wie $AC\text{q}+AC\times FH+\left\{\frac{AC\times NO}{FH\text{q}}\right\}:AC\text{q}$; und ebenso verhalten sich auch die Grundflächen ABC, FGH nebst der mittlerenProportionalfläche zwischen ihnen zur Grundfläche ABC. Mithin verhält sich der Rumpf zu d. $(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}}, \text{die}_{\text{der}})$ die grössere Grundfläche des Rumpfes zur Grundfläche und einerley Höhe mit ihm hat, wie die beyden Grundflächen des Rumpfes nebst der mittlern Proportionalfläche zwischen ihnen zur grösseren Grundfläche. Das nämliche Verhältnis zu d. genannten $(\text{Pyr.}_{\text{Keg.}})$ aber haben drey $(\text{Pyramiden}_{\text{Kegel}})$, welche die genannten drey Flächen zu Grundflächen und einerley Höhe mit demRumpf haben. Folglich ist der Rumpf den genannten drey $(\text{Pyramiden}_{\text{Kegeln}})$ gleich. Hieraus ergibt sich die Methode, den Innhalt des Rumpfs $(\text{einer Pyr.}_{\text{eines Keg.}})$ zu finden, welche Ca-

vius in seiner Geometria practica *) L. V. Cap. III. 3. vortragt.

§. 4. Wiederum, da $AC + \left\{\begin{matrix} FH \\ CL \end{matrix}\right\} + NO : 3AC$

$= AC^q + CL^q + ACL : 3AC^q$

$= AL^q + 3ACL : 3AC^q$ (E. II, 7.)

$= ACL + \frac{1}{3}AL^q : AC^q$;

so verhält sich der Rumpf (der Pyr. des Keg.) zum (Prisma, das Cylinder, der) die grössere Grundfl. des Rpfs zur Grundfl. und einerley Höhe mit ihr hat, wie das Rechtek aus zwey (homologen Seiten Durchmessern) der Grundflächen des Rumpfs nebst einem Drittel vom Quadrat des Unterschieds dieser (Seiten Durchmesser) zum Quadrat (der Seite des Durchmessers) der grössern Grundfläche.

§. 5. Und *umgekehrt und zurükkehrend* verhält sich der genannte Cylinder zu seinem nach Hinwegnehmung des Rumpfs übrig bleibenden Rest wie $3AC : 3AC - (AC + FH + NO)$; oder wie $AC^q : AC^q - ACL - \frac{1}{3}AL^q$

d. i., wie $AC^q : ALC + \frac{2}{3}AL^q$ (weil $AC^q = ACL + CAL = ACL + ALC + AL^q$ (E. II, 2. 3.))

das ist; wie das Quadrat des Durchmessers der grössern Grundfläche zum Rechtek aus dem Durchmesser der kleinern und dem Unterschied der beyden Durchmesser nebst zwey Dritteln des Quadrats dieses Unterschieds. Und *umgekehrt.*

§. 6. Die Säze von den Kegelrümpfen §. 4, 5. beweist Lucas Valerius im IIIten Buch, nachdem er den des §. 5, sofern er sich auf Pyramidenrümpfe bezieht, im IXn Saz erwiesen hat, im Xten Saz allgemeiner auch für solche Kegel und Cylinder, deren Grundflächen Ellipsen sind **) und, zum Theil vermittelst ihrer, alsdenn die Säze, welche für sphärische Figuren bewiesen hier §. 18. 19. 21. 23. 25. 27. folgen werden, von sphärischen und sphäroidischen zugleich.

*) Zuerst 1604 in Rom herausgekommen — nach *Scheibel* in seiner Ausg. von *Scheffels Proportionalcirkel.* S. 2.

**) „Portiones coni, cylindri"; ὀξυγωνίου κώνου, ὀρθῆς κυλίνδρου nach Archimed.

§. 7. Im VIten Saz des I B. beweist Luc. Valerius: dass „in jede auf einer Seite zusammenlaufende Fi„gur um einen Durchmesser eine aus Parallelogrammen „von gleichen Höhen bestehende Figur, und eine andere „darum beschrieben werden könne, so dass die darum be„schriebene die darein beschriebene um weniger übertreffe „als um jede gegebene gleichartige Grösse."

(L. I Prop. XI). Fig. 69.

§. 8. „In jeden durch Umdrehung einer ebe„nen auf einer Seite zusammenlaufenden Figur „um eine Axe entstandenen Körper, der einen „Kreis zur Grundfläche hat, lässt sich eine aus „Cylindern von gleichen Höhen bestehende Fi„gur, und eine andere darum beschreiben, so dass „die darum beschriebene die darein beschriebene „um weniger übertreffe als um irgend eine gege„bene gleichartige Grösse *).

„Es sey der Körper *ABC* durch Umdrehung einer „ebenen auf einer Seite zusammenlaufenden Figur um die „Axe *AD* entstanden; sein Scheitel *A*; seine Grundfläche „der Kreis um den Durchmesser *BC*. Man gedenke sich „auf dieser Grundfläche um die Axe *AD* einen Cylinder „*BL* beschrieben, welcher den Körper *ABC* einschliessen „wird. Man theile den Cylinder *BL* durch der Grund„fläche parallele Ebenen in so viele Cylinder von glei„chen Höhen, dass jeder derselben kleiner sey als die „gegebene Grösse: und es sey auch der Körper *ABC* „durch die gedachten Ebenen getheilt; so werden die

*) „*Omni solido circa axim in alteram partem de„ficienti, cuius basis circulus vel ellipsis, figura „quaedam ex cylindris vel cylindri portionibus „aequalium altitudinum inscribi potest et altera cir„cumscribi, ita ut circumscripta superet inscriptam „minori excessu quantacumque magnitudine pro„posita.*" Die Ausdehnung auf Körper, deren Grundflächen Ellipsen sind, ist hier, als zum folgenden nicht nöthig, Kürze halber weggelassen.

„Durchschnitte Kreise seyn. Auf diesen Durchschnitten „als Grundflächen seyen in und um die Figur Cylinder „von gleichen Höhen beschrieben, von denen immer „zwey als zwischen einerley parallelen Ebenen liegend „einander correspondiren, wie *BF* und *GDH*, welche „die gemeinschaftliche Axe *DK*, und die Kreise *EF*, *GH*, „deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt *K* ist, zu Grund„flächen haben; der oberste (darum beschriebene) aber kei„nem (darein beschriebenen) mehr correspondirt. Da „nun vermöge der Construction der Cylinder *BF* kleiner „als die gegebene Grösse ist, die Ueberschüsse der Cy„linder aber, aus denen die umbeschriebene Figur besteht, „über die correspondirenden, aus denen die einbeschriebe„ne besteht, nebst dem obersten, der keinem mehr corre„spondirt, zusammen dem Cylinder *BF* gleich sind; so „wird die um den Körper *ABC* beschriebene Figur die dar„ein beschriebene um weniger übertreffen als um die gege„bene Grösse. Folglich kann bewerkstelligt werden, was „behauptet wurde.“

§. 9. Noch vielmehr kann der Ueberschuss der darum beschriebenen Figur über den Körper *ABC*, und des Körpers *ABC* über die darein beschriebene kleiner gemacht werden als jede gegebene Grösse.

§. 10. Man hat mehrere Kunstwörter ersonnen, welche zur Abkürzung des Ausdruks von dergleichen Sätzen dienen sollten. Hier einige derselben nebst den Erklärungen, welche diejenige, die sie gebrauchten, davon gegeben haben:

„*Magnitudo quævis per inscriptas sibi magnitu„dines exhauriri* dicitur, cum inscriptæ magnitudines ab „ipsa deficere tandem possunt magnitudine data minori, „hoc est, quamvis parva. Similiter *magnitudo quævis „per circumscriptas sibi magnitudines exhauritur*, cum „hæ ipsam denique superare excessu minori dato possunt.“ *Tacquet* in seinen *Cylindric. & Annular* *). *Defin. ad Lib. I & II. 28.*

*) In den *Opp. Mathem. Andr. Tacquet. Antverpiæ 1668.* Die vier ersten Bücher dieser Cylindric. & Annular. sind 1651. das fünfte 1659. besonders herausgekommen.

„Magnitudines figuræ alicui inscriptæ aut circumscri„ptæ, sive figura minores & majores, *in figuram desi„nere* dicuntur, cum ab ea tandem differre possunt magni„tudine minori quacumque data seu quamtumvis parva". *Tacquet Elem. Geom.* *) *Lib. XII, nobis VIII. Def. 6.*

„— — We shall define an *ultimate magnitude* to be „the limit, to which a varying magnitude can approach „within any degree of nearness whatever, though it can „never be made absolutely equal to it." *Robins Discour„se of Fluxions &c.* **) §. *110.*

Man sehe noch die Erklärung von *Grenze einer wachsenden oder abnehmenden Grösse* in *L'Huilier's Principiarum calculi differentialis & integralis expositio elementaris. Cap. I.* §. *1.*

(*Lib. II. Prop. I.*)

§. 11. „Wenn vier Grössen sind, und zwo an„dere zugleich grösser oder kleiner als die erste und „dritte derselben um einen Unterschied, der klei„ner ist als irgend eine gegebene gleichartige Grös„se, und diejenige, die grösser oder kleiner ist „als die erste, zur zweyten sich verhält wie dieje„nige, welche zugleich grösser oder kleiner ist als „die dritte, zur vierten; so wird auch die erste zur „zweyten sich verhalten wie die dritte zur vier„ten ***).

*) *Elementa geometriæ planæ ac solidæ; Quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata. Auctore Andrea Tacquet.* Zuerst Antv. 1654. 1665. dann Amstelæd. 1683. herausgekommen.

**) In *Mathematical Tracts of Robins. Vol. II. Lond. 1761.*

***) „*Si duæ magnitudines una majores vel minores „prima & tertia, minori excessu vel defectu quan„tacumque magnitudine proposita ejusdem generis „cum illa, ad quam refertur, eandem proportionem „habuerint, major vel minor prima ad secundam, „& una major vel minor tertia ad quartam; erit „ut prima ad secundam ita tertia ad quartam.*"

Fig. 70. „Es seyen vier Grössen, A die erste, B „die zweyte, C die dritte, und D die vierte; und zwo „andere, die zugleich grösser seyen als A, C, deren Ue„berschuss über A, C aber, es mag von den unendlich „vielen mit A, C gleichartigen Grössen, welche gegeben „werden können, eine, wenn A, C gleichartig sind, oder „zwo, wenn sie ungleichartig sind, gegeben seyn, wel„che man will, kleiner sey als diese gegebene Grösse; und „es habe immer diejenige, welche grösser ist als A, zu B „das nämliche Verhältnis wie diejenige, welche grösser ist „als C, zu D. Ich behaupte, dass auch $A : B = C : D$."

„Denn man seze $E : D = A : B$, und irgend eine be„liebige Grösse $F > C$; ferner zwo andere; $H > C$ um „einen Ueberschuss, der kleiner sey als der von F über C, „d. i. $H > C$ und $< F$; und $G > A$ um einen Ueberschuss, „der kleiner sey als eine mit A gleichartige Grösse, so „dass $G : B = H : D$. Da nun

$F > H$, so ist $F : D > H : D$ d. i. $> G : B$;
„da aber $G > A$, so ist $G : B > A : B$;

„folglich $F : D > A : B$.

„Vermöge der Voraussezung ist nun F irgend eine belie„bige Grösse, die $> C$. Mithin kann keine Grösse, die $>$ „C, zu D sich verhalten wie A zu B. Es verhält sich „aber $E : D$ wie $A : B$. Folglich ist nicht $E > C$, und „nicht $E : D$, d. i. $A : B$, $> C : D$. Aus gleichem Grund „wird nicht $C : D > A : B$, d. i. nicht $A : B < C : D$ seyn. „Mithin ist $A : B = C : D$.

„Nun seyen aber zwo Grössen zugleich kleiner als „A, C um einen Unterschied, der kleiner sey als irgend „eine gegebene Grösse, und es verhalte sich diejenige, „welche kleiner ist als A, zu B wie die, welche kleiner „ist als C, zu D. Ich behaupte, dass $A : B = C : D$.

„Denn man seze wiederum $E : D = A : B$, und ei„ne beliebige Grösse $F < C$; ferner $H < C$ aber $> F$, und „$G < A$ um einen Unterschied, der kleiner sey als eine „mit A gleichartige Grösse, so dass $G : B = H : D$.

„Da nun $F < H$, so ist $F : D < H : D$ d. i. $< G : B$;
„da aber $G < A$, so ist $G : B < A : B$;

„folglich $F : D < A : B$.

„Nun ist F als eine beliebige Grösse, die $\prec C$, ge„sezt worden. Mithin verhält sich keine Grösse, die $\prec$ „C, zu D wie A zu B. Aber $E:D = A:B$. Folglich „ist nicht $E \prec C$, also nicht $E:D$ d. i. $A:B \prec C:D$. Aus „dem nämlichen Grund ist nicht $C:D \prec A:B$, d. i. nicht „$A:B \succ C:D$. Folglich $A:B = C:D$; welches bewie„sen werden sollte.

„*Anders.*“ *Fig.* 71.

„Ich behaupte, dass $A:B = C:D$. Denn es sey, „wenns möglich ist, $A:B \prec C:D$. So hat irgend eine „andere Grösse G, die $\succ A$, zu B das nämliche Verhält„nis wie $C:D$. Nun seyen $E \succ A$ aber $\prec G$, und $F \succ C$ „um einen Ueberschuss, der kleiner sey als eine mit C „gleichartige Grösse, so genommen, dass $E:B = F:D$. „Da nun $F \succ C$, so ist

$$F:D \quad \succ C:D.$$

„Aber $F:D = E:B$, $C:D = G:B$;

„folglich $E:B \succ G:B$; mithin $E \succ G$: wel„ches ungereimt ist, da $E \prec G$. Folglich ist nicht $A:B$ „$\prec C:D$. Aus gleichem Grund ist nicht $C:D \prec A:B$, „d. i., nicht $A:B \succ C:D$. Folglich $A:B = C:D$.

„Beym zweyten Theil der Voraussezung, der Grössen „betrifft, die zugleich kleiner als A, C sind; sey, wenns „möglich ist, $A:B \succ C:D$. So wird eine Grösse, die „$\prec A$, sie sey G, zu B sich verhalten wie $C:D$. Nun „seyen $E \prec A$ aber $\succ G$, und $F \prec C$ um einen Unterschied, „der kleiner sey als eine mit C gleichartige Grösse, so ge„nommen, dass $E:B = F:D$. Da nun

$$C:D \succ F:D,$$

„aber $C:D = G:B$, $F:D = E:B$.

„so ist $G:B \succ E:B$;

„daher $G \succ E$: welches unmöglich ist, weil $G \prec E$. Folg„lich ist nicht $A:B \succ C:D$. Aus dem nämlichen Grund „nicht $C:D \succ A:B$ d. i. $A:B \prec C:D$. Folglich $A:B =$ „$C:D$.“

§. 12. Nicht viel verschieden lautet der Ausdruk des vorigen Sazes in zwey Lehrsäzen bey *Renaldin* (*de Resolutione & Compositione Mathematica Libri duo. Patavii 1668*):

„Si fuerint quatuor quantitates proportionales; & per „continuata quidem incrementa prima minus deficiendo a „quapiam quinta, & tertia a quapiam sexta, semper in infini„tum, deficere tandem possint defectu minori quacumque „data quamtitate; perpetuo tamen eadem servata ratione „primæ ad secundam & tertiæ ad quartam; dico: quintam „ad secundam in eadem ratione esse, in qua est sexta ad „quartam." *Theor. VIII, p. 280.*

„Si sit ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam; „at vero prima minus semper in infinitum excedendo „quampiam quantitatem quintam, tandem excedere possit „excessu minori quacumque data quantitate; item tertia „respectu sextæ; perpetuo tamen servata eadem ratione „primæ ad secundam, & tertiæ ad quartam; dico: esse „ut quintam ad secundam, ita sextam ad quartam." *Theor. IX, ebendaselbst.*

Kürzer mit Gebrauch des Begriffs von *Grenze* (§. 10): „Wenn zwo ungleichartige Grössen, welche beyde ent„weder wachsen oder abnehmen, und deren jede eine „gegebene Grösse zur Grenze hat, zu zwo gegebenen „Grössen immer einerley Verhältnis haben; so haben auch „ihre Grenzen zu den nämlichen gegebenen Grössen ei„nerley Verhältnis." *L'Huilier Expos. §. 5.*

(*L. II. Prop. II.*)

§. 13. „Wenn eine Grösse, die grösser oder „kleiner ist als die erste (von vier Grössen), zu ei„ner Grösse, die zugleich grösser oder kleiner ist „als die zweyte, beyde um einen Unterschied, der „kleiner ist als irgend eine gegebene Grösse, sich „verhält wie die dritte zur vierten; so verhält sich „die erste zur zweyten wie die dritte zur vierten *).

Fig. 12. „Es seyen vier Grössen, *A* die erste, *B* die zweyte, *C* die dritte, *D* die vierte, und zwo andere „*E*, *F* die zugleich grösser seyen als *A*, *B* um einen

*) „*Si major vel minor prima ad unà majorem vel „minorem secunda, minori utriusque excessu vel „defectu quantacumque magnitudine proposita, „fuerit ut tertia ad quartam; erit ut prima ad se„cundam, ita tertia ad quartam.*"

„Ueberschuss, der kleiner sey als irgend eine gegebene „mit A, B gleichartige Grösse; und die E, welche grö„ser ist als A, verhalte sich zu F, welche grösser ist als „B, wie C zu D. Ich behaupte, dass auch $A:B=C:D$.

„Denn es verhalte sich, welches möglich ist, eine an„dere mit E, F gleichartige Grösse G zu einer andern H, „wie G zu D oder E zu F. So ist *verwechselt* $E:G=$ „$F:H$; und es sind E, F zugleich grösser als A, B um „einen Ueberschuss, der kleiner ist als irgend eine ge„gebene Grösse. Folglich ist vermöge des vorhergehenden „Satzes (§. 11.) $A:G=B:H$, und *verwechselt* $A:B=$ „$G:H$ d. i. $=C:D$.

„Auf ähnliche Art würde der Beweis für den Fall ge„führt werden, wo E, F kleiner als A, B und auf die „gedachte Art proportionirt sind. Der Satz ist also richtig.

„*Anders.*“ *Fig. 73.*

„Das nämliche vorausgesetzt; wenn nicht $A:B=$ „$C:D$, so ist das Verhältnis $A:B$ grösser oder kleiner „als das $C:D$.

„Es sey grösser. So verhält sich $C:D$ wie die näm„liche A zu einer andern, die $>$ B. Diese sey E. Und „es seyen zwo andere Grössen $F>B$ aber $<E$, und „$G>A$ um einen Ueberschuss der kleiner sey als eine „mit A gleichartige Grösse, so dass $G:F=C:D$.

„Da nun auch $C:D=A:E$;

„so ist $G:F=A:E$.

„Nun ist $G>A$; folglich $F>E$: welches unmöglich ist, „da $F<E$. Also ist nicht $A:B>C:D$. Ebenso ist nicht „$B:A>D:C$, d. i., nicht $A:B<C:D$. Folglich $A:B=$ „$C:D$.

„Im Fall, da die zwo Grössen kleiner als A, B sind, „wenn nicht $A:B=C:D$, sey, wenns möglich ist, $A:B$ „$<C:D$. So verhält sich A zu einer andern, die $<B$, „wie $C:D$. Diese andre sey E. Und es seyen zwo andre „Grössen, $F<B$ aber $>E$, und $G<A$ um einen Unter„schied, der kleiner sey als eine mit A gleichartige Grös„se, so dass $G:F=C:D=A:E$. So ist, da $G<A$, „auch $F<E$, die grössere $<$ als die kleinere: welches un„gereimt ist. Demnach ist nicht $A:B<C:D$. Ebenso

„ist nicht $B : A \lhd D : C$, d. i., nicht $A : B \rhd C : D$. Folglich $A : B = C : D$."

§. 14. Vermittelst der §. 10. erklärten Kunstwörter wird lezterer Saz kürzer ausgedrükt:

„Datæ sint binæ quantitates A & B, sive superficies „sive corpora. Data sit item ratio quæcumque E ad F. Si „quantitatibus A & B aliæ atque aliæ magnitudines sine termino inscribi possunt, quæ et eam semper inter se rationem servent quam E ad F, & quantitates ipsas A, B „exhauriant, hoc est, ab iis deficiant defectu quamtumvis „parvo; erit quantitas A ad quantitatem B ut E ad F." *Tacquet Cylindr. & Annul. L. I. Pars I. Prop. I.* In *Lib. II. Pars II. Prop. I.* verbindet er „inscribi & conscribi", und sezt „differant quantitate" statt „deficiant „defectu"; im übrigen wiederholt er dieselben Worte.

„Si ea, quæ duabus figuris inscribuntur, in ipsas de„sinant; quam proportionem inter se habent inscripta, eandem habent & figuræ." *Tacquet Elem. Geom. Lib. VIII. Porisma universale* nach *Prop. II.*

„When varying magnitudes keep constantly the same „proportion to each other, their ultimate magnitudes are „in the same proportion". *Robins Discourse of Fluxions &c. §. 114.*

„Wenn zwo veränderliche Grössen, deren jede eine „gegebene Grösse zur Grenze hat, ein gegebenes Verhältnis zu einander haben; so haben ihre Grenzen dasselbe „Verhältnis." *L'Huil. Exp. §. 4.*

Newtons viertes Lemma in Princip. Lib. I. Sect. I. enthält den Saz auf ein Beyspiel angewandt: „Si in duabus „figuris — — — inscribantur — — — parallelogramma, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in „una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad „singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ — — — sunt „ad invicem in eadem illa ratione."

§. 15. Wenn in § 13 das Verhältnis von C zu D das Verhältnis der Gleichheit ist, so ergibt sich der Saz:

„Si quantitatibus A & B aliæ magnitudines (inscribi conscribi) „possunt, quæ & semper æquales sint inter se, & quanti-

„tates ipsas *A*, *B* exhaurient; erit quantitas *A* æqualis „quantitati *B*.“ *Tacquet Cyl. & Annul. L. I. Pars I. Prop. I. Cor. L. II. Pars I. Prop. I. Cor.*

„Datæ sint figuræ quæcumque seu planæ seu solidæ, „*A* & B. Sint autem magnitudines, aliæ semper atque a„liæ, quæ (figuras datas a figuris datis) *A* & *B* semper minus ac minus „(excedendo deficiendo) in ipsas desinant, & tamen inter se æquales „sint. Dico etiam figuras *A* & *B* æquales esse.“ *Tacquet Elem. Geom. Theoremata selecta ex Archimede. Prop. I, II.*

„The ultimate magnitudes of the same or equal varying magnitudes are equal.“ *Robins Disc. of Flux. §. 120.*

§. 16. Das Verhältnis von *C* zu *D* §. 13. kann „pro„portio dupla, sesquialtera“ u. dgl., „duplicata alicuius, „triplicata“ u. s. w., kurz irgend eine „proportio nomi„nata“ seyn. Dis zeigt Valerius noch besonders durch *L. II. Prop. III.* an:

„*Si major vel minor prima ad una majorem vel „minorem secunda, minori excessu vel defectu quanta„cumque magnitudine proposita, nominatam habuerit „proportionem; prima ad secundam eandem nominatam „habebit proportionem;*“

wovon er übrigens den Beweis auch auf den Saz §. 13. zurükführt.

§. 17. Obgleich das Gemeinschaftliche in dem Gang der Schlüsse, durch welche die Alten ihre Entdekungen über die Ausmessungen oder Verhältnisse krummer Linien, krummlinichter Räume und von krummen Oberflächen eingeschlossener Körper sowohl als ihrer Oberflächen beweisen, oder das Allgemeine ihrer *Exhaustionsmethode* (vgl. §. 11.) sich grossentheils auf die §. 13 oder 14 und §. 15 vorgetragenen Säze zurükführt (*Robins Disc. of Flux. §. 89 flgg. Mac Laurin's Treatise of Fluxions. Edinb. 1742. Introduction, p. 3-16. L'Huil. Exp. §. 4. Observatio.*), und diese Verallgemeinerung den Alten nicht entgegen seyn mochte (*Pfleiderers Thes. Math. Physicæ. Tubingæ 1792. XVIII.*); so ist doch der allgemeine Ausdruk jener Säze erst von Neuern versucht und dazu

gebraucht worden, um die umständlichen Deductionen bey den Beweisen der einzelnen Säze zu umgehen. *Lucas Valerius* ist wohl der erste, der diesen Versuch gemacht hat, und er hat dadurch seine Säze über die Ausmessung und den Schwerpunkt der Kugel, des Sphäroids, der parabolischen und hyperbolischen Konoiden kurz und elegant bewiesen. Nach ihm hat *Andr. Tacquet* seine §. 14, 15. angeführten Säze in seinen Elementis Geometriæ zur Abkürzung der Euklidischen Beweise von den Säzen des XIIten Buchs der Elemente und der Archimedischen über die Kugel gebraucht, und in seiner Schrift: *Cylindrica & Annularia*, zur Grundlage seiner Beweise gemacht. *Renaldinus* hat in seinem oben erwähnten Aufsaz die vorgetragenen und mehrere dergleichen allgemeine Säze und ihren Gebrauch umständlich abgehandelt. Nach Erfindung der neuen Methoden zu Ende des vorigen Jahrhunderts haben diejenige, die sich damit beschäftigten, von den Principien derselben strenge Beweise zu geben, die leztern auf die nämlichen und andere Säze dieser Art gegründet (*Robins Disc. of Flux.* am angef. Ort; *Rob. Simson de limitibus quantitatum & rationum* in seinen *Opp. posth. Glasguæ 1776*; *L'Huil. Expos. Cap. I.*)

(*Lib. II. Prop. XII. Vgl. L. III. Prop. XII, XIII.*)

Fig. 74.

§. 18. „Die Halbkugel ist das Doppelte eines Kegels, „und die zwey Drittel eines Cylinders, welche einerley Grundfläche und Höhe mit ihr haben."

„Es sey eine Halbkugel, deren Axe *BD*, ihre Grund„fläche der Kreis, dessen Durchmesser *AC*, auf diesem der „Cylinder *AE* und der Kegel *ABC*, welche die gemein„schaftliche Axe *BD* und daher auch einerley Höhe haben. „Ich behaupte, dass die Halbkugel *ABC* das Doppelte des „Kegels *ABC* und zwey Drittel des Cylinders *AE* sey.

„Denn man beschreibe auf dem Kreis *RE* als Grund„fläche einen Kegel *EDR*, dessen Spize *D* sey. Man „halbire die Axe *BD*, ihre Hälfte wieder, und so fort; „und lege durch die Theilungspunkte der Grundfläche der „Halbkugel parallele Ebenen, welche die Halbkugel, den „Kegel und den Cylinder durchschneiden. So wird der „Cylinder *AE* in Cylinder von gleichen Höhen getheilt

„seyn. Auf den Durchschnitten des Kegels und der Halb-
„kugel aber, den Kreisen nämlich, deren Mittelpunkte in
„der Axe BD liegen, gedenke man sich Cylinder aufge-
„stellt, die sich immer zwischen zwey einander zunächst
„liegenden parallelen Ebenen befinden, deren Axen alle in
„BD liegen. So wird in den Kegel EDR und um die
„Halbkugel eine aus Cylindern von gleichen Höhen beste-
„hende Figur beschrieben seyn. Es seyen aber diese Fi-
„guren so um und einbeschrieben, dass die umbeschriebene
„die Halbkugel um weniger übertreffe, die einbeschriebene
„aber vom Kegel um weniger unterschieden sey, als
„um irgend welche gegebene Grösse (§. 9). Wenn dis ge-
„schehen ist, so ist offenbar, dass in den nach Hinweg-
„nehmung der Halbkugel übrig bleibenden Rest des Cy-
„linders AE eine aus den nach Hinwegnehmung der um
„die Halbkugel beschriebenen Cylinder von den Cylindern,
„in welche der AE getheilt war, übrig bleibenden Resten
„bestehende Figur beschrieben sey, die von dem nach
„Hinwegnehmung der Halbkugel vom Cylinder AE übrig
„bleibenden Rest weniger unterschieden ist als um die ge-
„gebene Grösse, nämlich um eben das, um was die um
„die Halbkugel beschriebene Figur die Halbkugel übertrifft,
„den Rest ausgenommen, welcher vom untersten Cylin-
„der AS nach Hinwegnehmung des von ihm eingeschlos-
„senen Stüks der Halbkugel übrig bleibt. Von den er-
„wähnten Cylindern, in welche der AE getheilt wird,
„sey der oberste FE, dessen Axe BH; und der gemein-
„schaftliche Durchschnitt der durch den Punkt H gehen-
„den der Grundfläche der Halbkugel parallelen Ebene mit
„der Ebene durch die Axe BD sey die gerade Linie
„$FGKHMNL$.

„Da nun $BD^q = DH^q + 2DHB + BH^q$, und $2DHB + BH^q = (BD+DH) \times BH$;

„so ist BD^q d. i. $FH^q = DH^q + (BD+DH) \times BH$

„Aber $KH^q = (BD+DH) \times BH$;

„Folglich $FH^q - KH^q = DH = GH^q$. Und das Vierfache genommen,

$FL^q - MK^q = GN^q$.

„Mithin Kreis FL – Kreis MK = Kreis GN;
„folglich auch Cylinder FE – Cyl. QK = Cyl. GP, da ihre
„Höhen gleich sind.

„Auf ähnliche Art liesse sich von allen nach Hinweg-
„nehmung der um die Halbkugel beschriebenen Cylinder

„von den gleich hohen Cylindern, in welche der Cylinder „*AE* getheilt worden ist, übrigbleibenden Resten beweisen, „dass sie den zwischen den nämlichen Ebenen befindlichen „in den Kegel *EDR* beschriebenen Cylindern gleich seyen. „Daher ist die ganze aus den genannten Cylinderresten *) „bestehende in den nach Hinwegnehmung der Halbkugel „vom Cylinder *AE* übrigbleibenden Rest beschriebene Figur „der in den Kegel *EDR* beschriebenen Figur gleich. Diese „beyden Figuren aber sind kleiner, die eine als der Kegel „*EDR*, die andere als der nach Hinwegnehmung der Halb„kugel vom Cylinder *AE* übrig bleibende Rest, um weniger „als um eine gegebene Grösse, welche man wollte. Folg„lich ist der nach Hinwegnehmung der Halbkugel vom Cy„linder *AE* übrig bleibende Rest dem Kegel *EDR* gleich „(§. 15.). Aber der Kegel *EDR*, d. i. der Kegel *ABC*, „ist der dritte Theil des Cylinders *AE*. Folglich ist der „nach Hinwegnehmung der Halbkugel vom Cylinder *AE* „übrigbleibende Rest der dritte Theil des Cylinders *AE*; „d. i., der Cylinder *AE* das Dreyfache des genannten Rests; „folglich der Cylinder *AE* anderthalbmal so gros als die „Halbkugel *ABC*, und umgekehrt die Halbkugel zwey „Drittel des Cylinders *AE*, mithin das Doppelte des Kegels „*ABC*.

(*Lib. III. Prop. XIV.*)

§. 19. „Wenn die Halbkugel, der um dieselbe beschriebene Cylinder und der Kegel, der mit „ihnen einerley Axe und den ihrer gemeinschaft„lichen Grundfläche gegenüberliegenden Kreis zur „Grundfläche hat, von zwey der Grundfläche pa„rallelen Ebenen durchschnitten werden; so ist „jedes der Stüke, welche die genannten Ebenen „von dem nach Hinwegnehmung der Halbkugel „vom darum beschriebenen Cylinder übrig bleiben„den Rest abschneiden, dem zwischen den nämli„chen Ebenen befindlichen Theil des genannten Ke„gels gleich."

*) Die sonst auch *annuli*, *tubi cylindrici*, *cylindri cavi* heissen.

Wie nämlich §. 18. bewiesen wurde, dass

a) Fig. 74. der Rest Cyl. AE — Halbk. ABC = Kegel EDR; ebenso liesse sich beweisen, dass

b) Fig. 76. ein Rest wie Cyl. AE — Kugelstük $ABCD$ = Kegel HFK. Daher ist auch

c) Fig. 75. ein Rest wie Cyl. EF - Kugelstük ABC = abgekürztenKegel $HKLF$. Denn ein sölcher Rest und abgekürzter Kegel bleiben übrig, wenn von gleichen Resten und Kegeln wie *a*) gleiche Reste und Kegel wie *b*) weggenommen werden.

d) Fig. 77. ein Rest wie Cyl. SO — Kugelst. $ABCD$ = abgek. Kegel $KLMN$. Denn ein solcher Rest und abgek. Kegel bleiben wiederum übrig, wenn von gleichen Resten und Kegeln wie *b*) eben solche gleiche Reste und Kegel, kleinere von grössern, hinweggenommen werden.

(*L. II. Prop. XIII*). *Fig. 75.*

§. 20. „Jeder kleinere Kugelabschnitt." (d. i. der kleiner ist als die Halbkugel) „verhält sich zu einem Cylinder, der eine dem grösten Kreis gleiche Grundfläche und einerley Höhe mit dem Abschnitt hat, wie der Ueberschuss des Dreyfachen vom Halbmesser der Kugel über drey stetige Proportionallinien, von welchen der Halbmesser der Kugel die gröste, die zwischen den Mittelpunkten der Kugel und der Grundfläche des Abschnitts liegende gerade Linie aber die mittlere ist, zum Dreyfachen des Halbmessers der Kugel."

„Es sey eine Kugel, deren Mittelpunkt D und deren Halbmesser BD sey; der Kugelabschnitt ABC kleiner als die Halbkugel, dessen Axe der Abschnitt BG des Halbmessers BD und dessen Grundfläche der Kreis um den Durchmesser AC sey. Ferner sey EF ein Cylinder, der die nämliche Axe oder Höhe BG habe, und dessen Grundfläche dem grösten Kreise, dessen Halbmesser BD ist, gleich sey. Ich behaupte, dass der Abschnitt ABC zum Cylinder EF sich verhalte, wie der Ueberschuss des

„Dreyfachen von *BD* über *BD*, *DG* und die dritte Pro„portionallinie zu ihnen, welche *M* sey, zum dreyfachen „von *BD*.

„Denn man beschreibe auf der Grundfläche des Cylin„ders *EF*, deren Durchmesser *FH* ist, einen Kegel *FDH*, „dessen Spize *D* sey; und gedenke sich von demselben „durch die der Ebene des Kreises *FH* parallele Ebene, wel„che den Abschnitt *ABC* abschneidet, den abgekürzten Ke„gel *FHKL* abgeschnitten. Da nun der abgekürzte Kegel „*FHKL* dem nach Hinwegnehmung des Abschnitts *ABC* „vom Cylinder *EF* übrigbleibenden Reste gleich ist (§. 19); „so ist der Abschnitt *ABC* dem Reste gleich, welcher „nach Hinwegnehmung des abgekürzten Kegels *FHKL* „vom Cylinder *EF* übrig bleibt.

„Nun verhält sich jener Rest zum Cylinder *EF* wie „$3FH - (FH + KL$ nebst der dritten Proportionallinie zu „*FH*, *KL*) zu $3FH$ (§. 5). Aber $FH : KL = BD : DG$ „$= DG : M$. Folglich das Kugelstük ABC: Cyl. $EF = 3BD$ „$- (BD + DG + M) : 3BD$.

§. 21. (*Lib. II. Pr. XVI*). „Auch verhält sich der genannte Kugelabschnitt (*ABC*) zum genannten Cylinder (*EF*) „wie das Rechtek (*BGD*) aus der Axe des Ab„schnitts und dem übrigen Stük der halben Axe der Kugel „nebst ($\frac{2}{3}\ BG^q$) zwey Dritteln des Quadrats der Axe des „Abschnitts zu (BD^q) dem Quadrat der halben Axe der „Kugel.“

Denn der vorhin erwähnte Rest, dem der Abschnitt *ABC* gleich ist, verhält sich zum Cylinder *EF* wie $KL \times (HF - KL) + \frac{2}{3}(HF - KL)^q : HF^q$ (§. 5.) : und ebenso verhält sich $DGB + \frac{2}{3}\ BG^c : BD^q$, weil $HF : KL : HF - KL = BD : DG : BG$. Hieraus erhellt das gesagte.

(*L. II. Prop. XIV.*) *Fig. 76.*

§. 22. „Jedes durch zwo parallele Ebenen, deren ei„ne durch den Mittelpunkt geht, abgeschnittene Ku„gelstük“ (Kugelrumpf) *) „verhält sich zu einem

*) Ein von zwo parallelen Ebenen abgeschnittenes Kugelstük wird nämlich sonsten *truncus sphæricus* genannt; wofür in der Folge das Wort *Rumpf*, wie oben beym Kegel, gebraucht werden soll.

„Cylinder, der mit dem Rumpf einerley Grund-
„fläche, nämlich den grösten Kreis, und einerley
„Höhe hat, wie der Ueberschuss der geraden Li-
„nie, welche zur Axe des Rumpfs und zum Halb-
„messer der Kugel die dritte Proportionallinie
„ist, über den dritten Theil der Axe des Rumpfs,
„zur genannten dritten Proportionallinie.

„Es sey von einer Kugel, deren Mittelpunkt F ist,
„der Rumpf $ABCD$ durch zwo parallele Ebenen abgeschnit-
„ten, deren eine durch den Mittelpunkt F geht; die Axe
„des Rumpfs FG, seine grössere Grundfläche der gröste
„Kreis, dessen Durchmesser AD, die kleinere der Kreis,
„dessen Durchmesser BC; und der Cylinder AE, dessen
„Grundfläche der Kreis AD, und dessen Axe FG. Ferner
„sey $FG : FA = FA : MN$, und von MN sey $NO = \frac{1}{3}FG$
„abgeschnitten. Ich behaupte, dass der Rumpf $ABCD$ zum
„Cylinder AE sich verhalte wie OM zu MN.

„Denn man nehme $GH = FG$, und beschreibe um die
„Axe FG den Cylinder LK und den Kegel HFK. Da nun
„die zwey Cylinder AE, LK einerley Höhe haben, so
„verhalten sie sich wie ihre Grundflächen AD, KH; das
„ist, der Cylinder AE hat zum Cylinder LK das duplicirte
„Verhältnis von dem des Durchmessers AD zum Durch-
„messer KH, d. i. von dem des Halbmessers AF zum
„Halbmesser GH, das ist, das Verhältnis $MN : \left\{\begin{matrix} GH \\ FG \end{matrix}\right\}$.

„Da nun $(MN : FG = \text{Cyl. } AE : \text{Cyl. } LK)$
$FG : \left\{\begin{matrix} \frac{1}{3}FG \\ NO \end{matrix}\right\} = \text{Cyl. } LK : \text{Keg. } KFH;$

„so ist *glf.* $MN : NO = \text{Cyl. } AE : \text{Keg. } KFH$, d. i. zum
„Rest, welcher übrig bleibt, wenn man vom Cylinder AE
„den Rumpf $ABCD$ wegnimmt (§. 19.).
„U. *zurükk.* $MN : OM = \text{Cyl. } AE : \text{Rpf } ABCD$,
„u. *umgek.* $OM : MN = \text{Rpf } ABCD : \text{Cyl. } AE$.

§. 23. (*L. III. Pr. XVII.*) Die Axe FG über G hinaus verlängert schneide die Kugeloberfläche in P, über F hinaus in Q.

Der genannte Kugelrumpf $ABCD$ verhält sich auch zum genannten Cylinder (AE) „wie das Rechtek (PGQ)

„aus den beyden durch den Mittelpunkt der kleineren „Grundfläche des Rumpfs gemachten Abschnitten der mit „der Axe des Rumpfs in gerader Linie liegenden Axe der „Kugel nebst ($\frac{2}{3}FG^q$) zwey Dritteln vom Quadrat der A„xe des Rumpfs zu (FP^q) dem Quadrat der halben Axe „der Kugel.“

Denn da $\text{Cyl.}AE : \text{Cyl.}LK = FA^q : FL^q$; so ist

zurükk. u. umg. $\text{Cyl.}AE - \text{Cyl.}LK : \text{Cyl.}AE = \left\{\begin{matrix} FA^q - FL^q \\ ALD \end{matrix}\right\}_{\text{E. 11, 5.}} : FA^q$.

Nun ist $\left\{\begin{matrix} \text{Cyl.}LK - \text{Keg.}HFK \\ \frac{2}{3}\text{Cyl.}LK \end{matrix}\right\} : \text{Cyl.}AE = \frac{2}{3}FL^q : FA^q$;

folg. (E. V, 24) $\left\{\begin{matrix} \text{Cyl.}AE - \text{Keg.}HFK \\ \text{Rumpf}\ ABCD \end{matrix}\right\} : \text{Cyl.}AE = ALD + \frac{2}{3}FL^q : FA^q$ d. i. $= PQR + \frac{2}{3}FG^q : FP^q$.

(*Lib. II. Prop. XV.*) *Fig. 77.*

§. 24. „Jeder durch zwo parallele Ebenen, „deren keine durch den Mittelpunkt geht, zwi„schen denen auch der Mittelpunkt nicht liegt, „weggeschnittene Kugelrumpf verhält sich zu ei„nem Cylinder, dessen Grundfläche dem grösten „Kreise gleich und dessen Höhe einerley mit der „Höhe des Rumpfs ist, wie der Ueberschuss der „geraden Linie, welche zu den Dreyfachen der „zwischen den Mittelpunkten der Kugel und der „kleineren Grundfläche des Rumpfs liegenden ge„raden Linie und des Halbmessers der Kugel die „dritte Proportionallinie ist, über drey stetige Pro„portionallinien, von denen die zwischen den Mit„telpunkten der Kugel und der kleineren Grundflä„che des Rumpfs liegende gerade Linie die gröste, „die zwischen den Mittelpunkten der Kugel und „der grösseren Grundfläche des Rumpfs liegende „aber die mittlere ist, sich zur erst genannten drit„ten Proportionallinie verhält.

„Es sey *ABCD* ein Rumpf einer Kugel, deren Mit„telpunkt *C*, welches durch zwo parallele Ebenen abge-

„schnitten sey, deren keine durch E geht, die auch E „nicht zwischen sich liegend haben; dessen grössere Grund„fläche der Kreis um den Durchmesser AD, die kleinere „der Kreis um den Durchmesser BC, und dessen Axe GH „sey. Der Halbmesser der Kugel sey EGF. Es sey „$GE : EH = EH : V$; $T = 3EF$, $X = 3EG$, und $X : T = T : ZY$, und von der leztern das Stük $ZW = GE + EH + V$. Ich behaupte, dass der Rumpf $ABCD$ zum „Cylinder SO sich verhalte wie $WV : YZ$.

„Man schneide $GK = GE$ ab, und beschreibe den Cy„linder PN um die Axe GH, und den Kegel KEN, wie „im vorhergehenden (§. 22.). So schneidet die das Ku„gelstük abschneidende Ebene vom Kegel KEN einen ab„gekürzten Kegel $KLMN$ ab, dessen kleinere Grundfläche „der Kreis um den Durchmesser LM, die grössere der „Kreis um den Durchmesser KN ist. Und es sey $\left\{\begin{matrix} GE \\ GK \end{matrix}\right\} :$ „$\left\{\begin{matrix} EF \\ SH \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} EF \\ SH \end{matrix}\right\} : I$. So lässt sich wie im vorhergehen„den (§. 22.) zeigen, dass

„Cyl. SO : Cyl. $PN = I : \left\{\begin{matrix} GK \\ EG \end{matrix}\right\}$.

„Da nun $\left\{\begin{matrix} GE, EF, I \\ \text{und } X, T, ZY \end{matrix}\right\}$ stetig proportionirt sind, und $FE : EG = T : X$;

„so ist $I : EG$, d. i. Cyl. SO : Cyl. $PN = ZY : X$.

„Und da $\left\{\begin{matrix} GE \\ GK \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} EH \\ LH \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} EH \\ LH \end{matrix}\right\} : V$, u. $X = 3EG = 3GK$,

„aber $3GK : GK + LH + V =$ Cyl. PN : abgek. Keg. $LKNM$ (§. 2);

„so ist $X : \left\{\begin{matrix} GE + EH + V \\ ZW \end{matrix}\right\} =$ Cyl. PN : abgek. Keg. $LKNM$.

„Nun war $ZY : X =$ Cyl. SO : Cyl. PN;

„*gleichf.* also $ZY : ZW =$ Cyl. SO zum abgek. „Kegel $LKNM$, d. i. z. Rest, der übrig bleibt, „wenn vom Cyl. SO der Kugelrumpf $ABCD$ „weggenommen wird (§. 19).

„Und *zurükk.* $ZY : YW =$ Cyl. SO : Kugelrumpf $ABCD$,

„und *umgek.* $WY : YZ =$ Kugelrumpf $ABCD$: Cyl. SO.

§. 25. (*L. III. Pr. XVIII.*). Man gedenke sich die Axe der Kugel *FGHEQ*.

Der genannte Kugelrumpf (*ABCD*) verhält sich zum genannten Cylinder auch „wie zwey Rechteke, das eine „(*FGQ*) aus den beyden vom Mittelpunkt der kleinern „Grundfläche des Rumpfs gemachten Abschnitten der mit „der Axe des Rumpfs in gerader Linie liegenden Axe der „Kugel, das andere (*EHG*) aus der zwischen den Mittelpunkten der Kugel und der grössern Grundfläche des „Rumpfs liegenden geraden Linie und der Axe des Rumpfs, „nebst ($\frac{2}{3}HG^q$) zwey Dritteln des Quadrats der Axe des „Rumpfs, zu (EF^q) dem Quadrat der halben Axe der Kugel."

Da *KN*, *LM*, *KN* - *LM* sich wie *EG*, *EH*, *HG* verhalten; so ist

Cyl.*PN*-abg.Keg.*KLMN*:Cyl.*PN*=*EHG*+$\frac{2}{3}$ *HG*^{q} : *EG*^{q} (§. 5.).

Nun ist Cyl.*PN* : Cyl.*SO* = *EG*^{q} : *EF*^{q};

also *gleichf.* Cyl.*PN*-abg.Keg.*KLMN*:Cyl.*SO*=*EHG*+$\frac{2}{3}$ *HG*^{q} : *EF*^{q}.

Aber Cyl.*SO* - Cyl. *PN* :Cyl.*SO*=$\left\{\begin{matrix} EF^q - EG^q \\ FGQ \end{matrix}\right\}$: *EF*^{q}

$\left\{\begin{matrix} \text{Cyl. } SO\text{-abg.Keg. } KLMN \\ \text{Kugelrumpf } ABCD \end{matrix}\right\}$: Cyl. *SO* = *FGQ* + *EHG* + $\frac{2}{3}HG^q$: *EF*^{q}.

fgl.(E.V,24)

(*L. II. Pr. XVI.*) *Fig. 78.*

§. 26. „Jeder grössere Kugelabschnitt" (grösser nämlich als die Halbkugel) „verhält sich zu einem Cy„linder, der eine dem grösten Kreis gleiche Grund„fläche und einerley Höhe mit dem Abschnitt hat „wie der Ueberschuss des zwischen dem Mittel„punkt der Kugel, und der Grundfläche des Ab„schnitts liegenden Stüks der Axe des Abschnitts „über den Ueberschuss der kleinern äussersten „von drey Proportionallinien im Verhältnis des

„Halbmessers der Kugel zum vorgedachten Stük „der Axe, von welchen eben dieses Stük die grös„sere äusserste ist, nebst zwey Dritteln des übri„gen Stüks der Axe sich zur Axe des Abschnitts „verhält.

„Es sey von einer Kugel, deren Mittelpunkt G, „Durchmesser DGE, ABC ein Abschnitt grösser als die „Halbkugel; BGF die Axe des Abschnitts, welche er mit „dem Cylinder KH gemeinschaftlich hat, dessen Grundfläche dem grösten Kreise gleich sey; die Grundfläche des „Abschnitts aber sey der Kreis, dessen Durchmesser AC „ist. Nun sey $EG : GF = GF : S = S : FM$, $FN = \frac{1}{3}FM$, „$GL = \frac{2}{5}BG$. Ich behaupte, dass der Abschnitt ABC zum „Cylinder KH sich verhalte wie LN zu BF.

„Denn es sey $FG : \left\{\begin{matrix} GE \\ BG \end{matrix}\right\} = EG : PQ$, und von PQ „die $QR = \frac{1}{3}GF$ abgeschnitten. Und von einer durch G „den Grundflächen des Cylinders KH und des Abschnitts „ABC parallel gelegten Ebene werde der Cylinder KH in „zwey Cylinder DH, EK, und zugleich der Abschnitt „ABC in den Rumpf $ECAD$ und in die Halbkugel DBE „getheilt.

„Da nun *umgek.* $PQ : EG = EG : GF$, und $QR = \frac{1}{3}GF$;
„so ist Rumpf $DACE$: Cyl. $EK = PH : PQ$ (§. 22).
„Wiederum, da $PQ : EG = EG : GF = GF : S$,
„und auch $EG : GF = S : FM$;
„so ist *gleichf.* $PQ : GF = GF : FM$.
„Aber $GF : QR = MF : FN$ d. i. $\frac{1}{3}FM$;
„folglich $PQ : QR = GF : FN$.
„U. *zurükk.* u. *umg.* $PR : PQ = NG : GF$.
„Mithin Rumpf $DACE$: Cyl. $EK = NG : GF$.
„Aber Cyl. EK : Cyl. $KH = GF : FB$;
„also *gleichf.* Rumpf $DACE$: Cyl. $KH = NG : BF$.
„Ebenso würde man beweisen, dass
„Halbkugel DBE : Cyl. $KH = GL : BF$, da Hbk. DBE : Cyl. $DH = LG : GB$;
„fgl. (E. V, 24) Abschnitt ABC : Cyl. $KH = LN : BF$.

§. 27. (*L. III. Pr. XIX.*) Man denke sich *BF* verlängert, schneide die Kugeloberfläche in *T*.

Der genannte Abschnitt (*ABC*) verhält sich zum genannten Cylinder *KH* auch „wie das rechtwinkliche Paral„lelepipedum (*BFT* × *GF*) aus der Axe des Abschnitts, „dem übrigen Theil der Axe der Kugel und der geraden „Linie zwischen den Mittelpunkten der Kugel und der „Grundfläche des Abschnitts, nebst je zwey Dritteln zwey„er Würfel ($\frac{2}{3}BG^c + \frac{2}{3}GF^c$), des einen von der halben „Axe der Kugel, des andern von der geraden Linie zwi„schen den Mittelpunkten der Kugel und der Grundfläche „des Abschnitts, zum rechtwinklichen Parallelepipedum „(*BGT* × *BF*) aus der Axe des Abschnitts und zwey hal„ben Axen der Kugel."

Denn Rpf *ADEC*: Cyl. *KE* = $BFT + \frac{2}{3}GF^3$: *BGT* (§. 23) =
$BFT \times GF + \frac{2}{3}GF^c$: $BGT \times GF$;

Cyl. *KE* : Cyl. *KH* =
$GF : BF = BGT \times GF : BGT \times BF$;

glchf.

Rpf *ADEC* : Cyl. *KH* = $BFT \times GF + \frac{2}{3}GF^c : BGT \times BF$.

Aber

$\left\{\begin{matrix}\text{Halbk. } DBE \\ \frac{2}{3}\text{Cyl. } DH\end{matrix}\right\}$: Cyl. *KH*
$= \frac{2}{3}BG : BF = \frac{2}{3}BG^c : BGT \times BF$.

Dah. (E. V, 24) Absch. *ABC*: Cyl. *KH* = $BFT \times GF + \frac{2}{3}GF^c + \frac{2}{3}BG^c : BGT \times BF$.

(*Lib. II. Prop. XVII.*) *Fig. 79.*

§. 28. „Jeder von zwo parallelen Ebenen, „zwischen denen der Mittelpunkt liegt, abge„schnittene Kugelrumpf verhält sich zu einem „gleich hohen Cylinder, dessen Grundfläche dem „grösten Kreise gleich ist, wie der Ueberschuss „der Axe des Rumpfs über den dritten Theil der „Summe zwoër geraden Linien, die zu je drey „Proportionallinien in den Verhältnissen des Halb„messers der Kugel zu den vom Mittelpunkt der „Kugel gemachten Abschnitten der Axe des Rumpfs

„die kleinern äusserten, in dem die gedachten „Abschnitte die grössern, sind, sich zur Axe des „Rumpfs verhält.

„Es sey von einer Kugel, deren Mittelpunkt G, ein „Rumpf durch zwo parallele Ebenen abgeschnitten, zwi„schen welchen der Mittelpunkt G liegt, der in der Axe „des Rumpfs seyn wird, welche HK sey. Die von den „genannten Ebenen gemachten Durchschnitte seyen die „Kreise, deren Durchmesser AD, BC, welche Kreise die „einander gegenüber liegenden Grundflächen des Rumpfes „seyn werden. Man schneide den Rumpf $ABCD$ durch „den Punkt G mit einer auf der Axe senkrechten und „daher auch den Grundflächen des Rumpfs parallelen Ebe„ne. Auf dem Durchschnitt, welcher ein gröster Kreis „seyn wird, dessen Durchmesser LM, gedenke man sich „zwey Cylinder beschrieben, die sich in den entgegen„gesezten Ebenen der Grundflächen des Rumpfs endigen, „und den ganzen Cylinder EF zusammensezen, dessen „Grundfläche dem grösten Kreis LM gleich ist. Man neh„me sodann auf dem Abschnitt GH die OH, ein Drittel „der kleinern äussersten dreyer Proportionallinien im Ver„hältnis $LG : GH$, indem GH die grössere äusserste ist; „und auf dem Abschnitt GK nehme man NK, ein Drit„tel der kleinern äussersten, indem GK die grössere ist, „von drey Proportionallinien im Verhältnis $LG : GK$. Ich „behaupte, dass der Rumpf $ABCD$ zum Cylinder EF sich „verhalte wie NO zu KH.

„Denn vermittelst der nämlichen Construction wie „im Beweis des vorhergehenden Sazes (§. 26.) liesse sich „zeigen, dass

„sowohl Rumpf $LBCM$: Cyl. $EF = OG : KH$,
„als auch Rumpf $LADM$: Cyl. $EF = NG : KH$.

Daher Rumpf $ABCD$: Cyl. $EF = NO : KH$ (E. V, 24).

§. 29. (*L. III. Pr. XX.*) Man gedenke sich „$PHGKQ$ die Axe der Kugel.

„Der genannte Rumpf ($ABCD$) verhält sich zum ge„nannten Cylinder (EF) auch „wie zwey rechtwinkliche „Parallelepipeden ($PK \times KQ \times GK$, $PH \times HQ \times GH$), „jedes aus drey einerley Endpunkte, nämlich den Mittel„punkt einer der Grundflächen des Rumpfs zu Endpunkten „habenden Abschnitten der Axe der Kugel, von denen

„zwey zusammen die Axe der Kugel ausmachen, der „dritte aber ein vom Mittelpunkt der Kugel gemachter „Abschnitt der Axe des Rumpfs ist, nebst zwey Dritteln „der beyden Würfel (GK^c, GH^c) von den durch den Mittelpunkt der Kugel gemachten Abschnitten der Axe des „Rumpfs zum rechtwinklichen Parallelepipedum ($PGQ \times HK$) „aus zwo halben Axen der Kugel und der Axe des Rumpfs. Denn es ist Rpf $ALMD$: Cyl. $EM = PKQ \times GK + \frac{2}{3} GK^c : PGQ \times GK$ (§. 23).

Aber Cyl. EM : Cyl. $EF = PGQ \times GK$: PGQ × HK;

Also *gleichf.* Rpf $ALMD$: Cyl. $EF = PKQ \times GK + \frac{2}{3} GK^c : PGQ \times HK$.

Eben so ist Rpf $LBCM$: Cyl. $EF = PHQ \times GH + \frac{2}{3} GH^c : PGQ \times HK$;

Figl. (E. V, 24) Rpf $ABCD$: Cyl. $EF = PKQ \times GK + PHQ \times GH + \frac{2}{3} GK^c + \frac{2}{3} GH^c : PGQ \times KH$;

Ueber den sphärischen Körper, der durch Umdrehung eines Kreisabschnitts um den Durchmesser beschrieben wird *).

Aus

Tacquets Cylindr. & Annul. Lib. I. Pars IV.

(*Prop. XLIII.*) *Fig. 80. b.*

§. 30. „Es sey ein ebener Ring $BCHK$, dessen Breite BC, der Mittelpunkt A: und irgend

*) *Zona globi* bey *Kepler* in *Nova stereom. dolior. Lincii 1615. Theor. XX.*

„ein Kreis *EGF*, dessen Halbmesser *EF*. Der „Ring verhält sich zum Kreise wie das Rechtek „*DBC* zum Quadrat des Halbmessers *EF*."

„Da der Kreis BHA : Kreis CKA = $BA^q : CA^q$,

„so ist *getr.* der eb. Ring $BCHK$: Kreis CKA = $\left\{\begin{matrix} BA^q - CA^q \\ DBC \text{ (E. II, 6)} \end{matrix}\right\} : CA^q$.

„Nun ist Kreis CKA : Kreis EGF = $CA^q : EF^q$;

„folgl. der ebene Ring $BCHK$: Kreis EGF = $DBC : EF^q$.

(*Prop. XLIV*). *Fig. 80. a.*

§. 31. „Es sey *HPGK* ein gröster Kreis einer „Kugel, und in demselben irgend eine gerade Li„nie *BC* nicht durch den Mittelpuukt *A* gezogen, „welcher der Durchmesser *GH* parallel sey. Der „durch Umdrehung des Kreisausschnitts *BKC* um „den Durchmesser *GH* entstehende sphärische Kör„per ist der Kugel gleich, deren Durchmesser *BC* „ist.

„Man beschreibe den grösten Kreis *CNBR* der Kugel, „deren Durchmesser *BC*; durch der beyden Kreise Mittel„punkt *A*, *S* ziehe man die gerade Linie *QR*: diese wird „die beyden Durchmesser *GH*, *BC* senkrecht schneiden. „Man theile sodenn den Halbmesser *SB* in eine Anzal glei„cher Theile, ziehe durch die Theilungspunkte *E* die *EKF* „der *QSR* parallel (welche mithin auf *BS* senkrecht seyn „werden), und beschreibe Rechteke sowohl in den Ab„schnitt *BKTS* als in den Quadranten *BFRS*. Nun lasse „man den Abschnitt *BKTS* mit seinen Rechteken sich um „den Durchmesser *GH* drehen. Durch diese Umdrehung „werden in den durch den Abschnitt *BKTS* entstandenen „sphärischen Körper durch die Rechteke *EX* erzeugte hoh„le Cylinder beschrieben werden, deren Grundflächen die „ebenen Ringe *EKPO*, und deren Höhen die *KX* oder „*EE* seyn werden. Wird ferner der Quadrant *BFRS* mit „den darein beschriebenen Rechteken um den Durchmesser „*BC* herumgedreht; so werden in die Halbkugel durch „die Rechteke *EZ* Cylinder beschrieben werden, deren

„Grundflächen die Kreise der Durchmesser *NF*, und de„ren Höhen *FZ* oder *EE* seyn werden.

„Da nun sowohl die Rechteke *PEK* als die Rechteke „*NEF* den Rechteken *BEC* gleich sind; so sind die Recht„eke *PEK*, d. i. *QKE*, den Rechteken *NEF*, d. i. den „Quadraten der *EF* gleich. Folglich werden (§. 31.) die „ebenen Ringe *EKPO* (welche die Grundflächen der hoh„len Cylinder sind), den Kreisen der Durchmesser *NF* „gleich seyn, welche die Grundflächen der ganzen Cylin„der sind. Weil nun die in den vom Abschnitt *BKTS* „erzeugten sphärischen Körper beschriebenen hohlen Cy„linder und die in die Halbkugel des Quadranten *BFRS* be„schriebenen ganzen Cylinder gleiche Grundflächen und „Höhen haben; so werden auch alle die hohlen Cylinder „allen den ganzen Cylindern gleich seyn. Und dis wird „immer geschehen, wenn auch jene Einbeschreibungen ins „Unendliche fortgesezt werden. Da nun auch durch jene „Einbeschreibungen so wohl der durch Umdrehung der „Kreisebene *BKTS* um *GH* erzeugte sphärische Körper „als auch die vom Quadranten *BFRS* erzeugte Halbkugel „erschöpft werden (§. 8-10. Vgl. §. 18.); so wird der „vom Abschnitt *BKTS* erzeugte sphärische Körper der „Halbkugel, und mithin der ganze durch Umdrehung der „Ebene *BKC* um *GH* entstandene sphärische Körper der „ganzen Kugel des Durchmessers *BC* gleich seyn (§. 15)."

„*Corollarium.*"

„Der durch Umdrehung des Kreisstüks *GBCH* um den „Durchmesser *GH* entstehende sphärische Körper ist mithin „dem Unterschied der Kugeln gleich, deren Durchmesser „*GH*, *BC* sind.

„Und wenn zwo Sehnen *MT*, *BC* dem Durchmesser „*GH* parallel sind; so ist der durch Umdrehung des Kreis„stüks *MBCT* um *GH* entstehende Körper dem Unterschied „der Kugeln gleich, deren Durchmesser *MT*, *BC* sind.

Ueber
die durch Umdrehung ebener regulärer Figuren entstehenden Körper;

Bestimmung der cylindrischen Oberflächen, denen die Oberflächen derselben gleich sind (§. 1, 2.) Verallgemeinerung des XXXII. Sazes im I. Buch Archimeds über Kugel und Cylinder (§. 3-5, 6, 9) und Folgerungen hieraus über die Verhältnisse jener Körper zu den in und um sie beschriebenen Kugeln (§. 7, 8. 10—19.).

Aus Torricelli *).

Erklärungen.

1. „*Diagonale* jedes regulären Vieleks von einer geraden Anzal Seiten nenne ich eine gerade Linie, welche „durch entgegengesezte Winkel der Figur gezogen wird; „*Loth* (*cathetum*) desselben aber eine gerade Linie, „welche die Mitten entgegengesezter Seiten verbindet. „*Loth* eines regulären Vieleks von einer ungeraden Anzal „Seiten nenne ich eine gerade Linie, welche von einem „Winkel durch den Mittelpunkt der Figur geht.

2. „Wenn irgend ein reguläres Vielek um eine Diagonale oder um ein Loth gedreht wird, bis es wieder „in die Lage kommt, in welcher seine Bewegung angefangen hat; so heisse der durch die Umdrehung entstehende Körper ein *sphäeralischer*: und zwar von einer „geraden Anzal Seiten, wenn das Vielek eine gerade, von

*) *Opera geometrica Evangelista Torricellii. Florentiæ 1644.*

De sphæra & solidis sphæralibus Libri duo, in quibus Archimedis doctrina de sphära & cylindro denuo componitur, latius promovetur, & in omni specie solidorum, quæ vel circa vel intra sphæram ex conversione polyponorum regularium gigni possunt, universalius propagatur.

„einer ungeraden, wenn das Vielek eine ungerade Anzal „von Seiten hat.

(*Lib. I. Prop. XIII, XIV.*) *Fig. 81.*

§. 1. Wenn an einen Kreis eine Tangente (*ML*) gezogen ist, von der auf beyden Seiten des Berührungspunkts gleiche Stüke (*MI, IL*) abgeschnitten werden; so wird die durch Umdrehung der Tangente mit dem Kreise um eine Axe, welche entweder die Tangente nicht schneidet (Fig. a) oder durch einen der Endpunkte der Tangente geht (Fig. b.), beschriebene Kegeloberfläche der krummen Oberfläche eines von dem um die zugleich entstandene Kugel beschriebenen Cylinder abgeschnittenen Cylinders (*GEFH*) gleich seyn, der einerley Höhe (*GH*) mit der genannten Kegeloberfläche hat.

1. *Fig. a.* Man ziehe *IP* der *GE* parallel, *IR* durch den Mittelpunkt *Q*, und *MT* senkrecht auf *GE*.

Da der Winkel *QIL* ein rechter ist, so ist der Winkel *SQI* = *SIL* = *MLT*, und die Dreyeke *SQI*, *MLT* sind gleichwinklich; daher *TM*: *ML* = *SI*: *IQ* = 2*SI*: 2*IQ* d. i. *PI*: *IR*. Folglich das Rechtek *TM* × *IR* d. i. *GHF* = *ML* × *IP* = *ML* × $\frac{1}{2}$ (*LO* + *MK*), weil *LM* in *I* halbirt, mithin *IP* die mittlere arithmetische Proportionallinie zwischen *LO*, *MK* ist. Folglich sind die Quadrate der Halbmesser der Kreise gleich, welche der genannten cylindrischen und der Kegeloberfläche *LOKM* gleich sind (Arch. ü. K. u. C. B. I, S. XIV, XVII.); mithin sind jene Kreise, und die genannten Oberflächen gleich.

2. *Fig. b.* Die *TM* in *M* auf *LM* senkrecht, oder der *IR* parallel gezogen treffe mit *LB* in *T* zusammen. Da nun *LM* = 2*LI*, so ist *MT* = 2*IR* = *AB*. Und es ist *ML*: *LN* = *TM*: *MN* (E. VI, 8), folglich Rechtek *LMN* = *TM* × *LN* = *GHF*. Mithin ist wiederum, wie vorhin, die Kegeloberfläche *MLO* der cylindrischen *EFHG* gleich (B. I u. K. u. C. S. XIV, XV.)

(*Lib. I. Prop. XV, XVI, XVII.*)

§. 2. Die Oberfläche eines sphäralischen Körpers ist der krummen Oberfläche eines Cylinders gleich, der gleichen Durchmesser mit der in die Figur beschriebenen Kugel hat, zur Höhe aber,

1. (*Fig. 87.*) wenn der Körper durch Umdrehung eines regulären Vieleks einer geraden Anzal Seiten um eine Diagonale (*AB*) entstanden ist; eben diese Diagonale.

Denn jede der Kegeloberflächen, die zusammen die Oberfläche des Körpers ausmachen, ist der gleich hohen cylindrischen Oberfläche des genannten Cylinders (§. 2); mithin die ganze Oberfläche des Körpers der ganzen cylindrischen gleich.

2. (*Fig. 88.*) Wenn der Körper durch Umdrehung eines regulären Vieleks von einer geraden Anzal Seiten um ein Loth (*AB*) entstanden ist; die Summe des Durchmessers der Kugel, und der dritten Proportionallinie zu ihrem Halbmesser und zur halben Seite des Vieleks (*AR*, wenn *VQR* ein rechter Winkel ist, wo sodenn $VB : BQ = BQ : BR$.)

Denn die konischen Oberflächen des Körpers sind, wie vorhin, den gleich hohen cylindrischen des genannten Cylinders gleich. Die beyden Kreise um den Durchmes. *NS*, *PQ* aber, oder der doppelte Kreis um *PQ*, sind einem Kreise gleich, von dessen Halbmesser das Quadrat $= 2BQ^2$ (E. XII. V, 24) $= 2VBR = GLM$; und die cylindrische Oberfläche *GLMH* ist dem nämlichen Kreise gleich (B. I. 2 K. u. C. S. XIV); mithin sind die beyden Kreise um *NS*, *PQ* der cylindrischen Oberfläche *GLMH* gleich. Hieraus ergiebt sich das gesagte.

3. (*Fig. 89.*) Wenn der Körper durch Umdrehung eines Vieleks von einer ungeraden Anzal Seiten um ein Loth (*AB*) entstanden ist; die Summe dieses Loths und der dritten Proportionallinie zum Durchmesser der Kugel und zur halben Seite des

Vieleks (*AR*, wenn *SQR* ein rechter Winkel, da denn *SB*: *BQ* = *BQ*: *BR*.)

Denn die krumme Oberfläche des Körpers ist, wie vorhin, der cylindrischen *EFHG* gleich. Die ebene Fläche des Kreises um *PQ* aber ist der cylindrischen *GLMH* gleich: denn das Quadrat von *BQ* dem Halbmesser des Kreises um *PQ* ist dem Rechtek *SBR*, d. i. *GLM*, dem nämlichen Rechtek aber ist das Quadrat vom Halbmesser des Kreises gleich, der der cylindrischen Oberfläche *GLMH* gleich ist.

Um den XXXII. Saz Archimeds im I. B. u. K. u. C. auf die dreyerley in *Erkl. 2.* erwähnten Arten sphäralischer Körper, und auch auf den Kegel auszudehnen (§. 8, 11.); fügt Torricelli den Säzen XVI - XXI im I. B. u. K. u. C. noch die drey folgenden (§. 3-5) bey:

(*L. I. Prop. XXV*) *Fig. 82.*

§. 3. Wenn von einem Cylinder *) (*ABCD*) ein Kegel (*BEC*) hinweggenommen wird, der mit ihm einerley Grundfläche und Höhe hat; so ist dem Ueberrest ein Kegel (*FIL*) gleich, dessen Grundfläche (*FL*) der krummen Oberfläche des Cylinders und dessen Höhe (*HI*) dem Halbmesser (*BN*) der Grundfläche des nämlichen Cylinders gleich ist.

Denn da Kegel im zusammengesezten Verhältnis ihrer Grundflächen und Höhen sind (E. XII, 11. 14 Cor.), die Grundfläche des Kegels *FIL* aber, d. i. die Oberfläche des Cylinders *ABCD* zur Grundfläche des Kegels *BEC* sich verhält wie *ABC*: *BN*^{q} (B I. u. K. u. C. S. XIV. E. XII, 2); das ist, wenn *BN* in *O* halbirt wird, wie *ABC*: *OBC*, d. i. wie *AB*: *BO*; so ist der Kegel *FIL*: Kegel *BEC* im zusammengesezten Verhältnis von *HI*: *AB*, *AB*: *BO*, mithin im Verhältnis *HI* d. i. *NB*: *BO*, oder 2: 1. Der Cylinderrest *ABECD* hat aber zum Kegel *BEC* das nämliche Verhältnis 2: 1 (E. XII, 10. V, 17.) Folglich ist der Kegel *FIL* dem Cylinderrest gleich.

*) Es werden hier immer *geradstehende* Kegel und Cylinder verstanden.

(*L. I. Prop. XXVI.*) *Fig. 83.*

§. 4. Wenn von einem Kegel (*ABC*) ein anderer (*ADC*) hinweggenommen wird, der einerley Grundfläche mit ihm und eine kleinere Höhe hat; so ist dem Ueberrest ein Kegel (*EFG*) gleich, dessen Grundfläche (*EG*) der konischen Oberfläche des ersten Kegels und dessen Höhe (*HF*) dem von der Spize des weggenommenen auf eine Seite des ersten gefällten Loth (*DI*) gleich ist.

Denn es ist der Kegel *EFG*: Kegel *ADC* im zusammengesezten Verhältnis von dem der Grundfläche *EG*, das ist, der konischen Oberfläche *ABC* zur Grundfläche *AC*, das ist, *AB*: *AL* (B. I ü. K. u. C. S. XVI.), und von dem der Höhe *FH* zur Höhe *DL*; mithin im zusammengesezten Verhältnis von dem *BD*: *DI* (wegen Aehnlichkeit der Dreyeke), und von dem *DI*: *DL*, (weil *FH* = *DI*); mithin im Verhältnis *BD*: *DL*. Nun ist aber Kegel *ABC*: Kegel *ADC* = *BL*: *LD*, und *getrennt*

Ueberrest *BADC*: Kegel *ADC* = *BD*: *DL*, d. i. = Keg. *EFG*: Keg. *ADC* vermöge des bewiesenen. Folglich ist der Kegel *EFG* dem genannten Ueberreste gleich.

(*Lib. I. Prop. XXVII.*) *Fig. 84.*

§. 5. Wenn von einem abgekürzten Kegel (*BADC*) ein Kegel (*BEC*) weggenommen wird, der die grössere Grundfläche des ersten zur Grundfläche und einerley Höhe mit demselben hat; so ist dem Ueberrest ein Kegel gleich, dessen Grundfläche der krummen Oberfläche des abgekürzten Kegels, und dessen Höhe dem von der Spize des weggenommenen auf eine Seite des abgekürzten gefallten Loth (*EH*) gleich ist.

Man vollende den Kegel *BGC*, und nehme *IL* die mittlere Proportionallinie zwischen *GB*, *BF*; so ist der Kreis, dessen Halbmesser *IL*, der konischen Oberfläche *BGC* gleich (B. I ü. K. u. C. S. XV). Man beschreibe auf *IL* einen Halbkreis, und in denselben die Sehne *IM*, wel-

che zwischen *GA*, *AE* die mittlere Proportionallinie sey; so ist ebenfalls der Kreis, dessen Halbmesser *IM*, der konischen Oberfläche *GAD* gleich. Mithin ist der Kreis, dessen Halbmesser *ML*, der zwischen *AD*, *BC* befindlichen Kegeloberfläche gleich (E. I, 47. XII, 2. V, 24).

Der Kegelüberrest *GBEC* ist nun einem Kegel gleich, der zur Grundfläche den Kreis, dessen Halbmesser *IL*, und zur Höhe *EH* hat (§. 4); mithin zweyen Kegeln zusammen, welche die Kreise, deren Halbmesser *IM*, *ML* sind, zu Grundflächen und die gemeinschaftliche Höhe = *EH* haben (E. XII, 11. V, 24). Nun ist aber der Kegel *GAD* dem Kegel gleich, der den Kreis, dessen Halbmesser *IM*, zur Grundfläche, *EH* zur Höhe hat (B. I d. K. u. C. S. XVIII). Folglich ist der übrig bleibende Rest vom abgekürzten Kegel, *ABECD*, dem Kegel gleich, der den Kreis, dessen Halbmesser *ML*, d. i. die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels zur Grundfläche, und *EH* zur Höhe hat.

(Lib. II Prop. I.) Fig. 85.

§. 6. Jeder um eine Kugel beschriebene Kegel (*ABC*) ist einem Kegel (*MNO*) gleich, dessen Grundfläche der ganzen Oberfläche des ersten Kegels und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Man ziehe vom Mittelpunkt G an die Berührungspunkte die Halbmesser *GF*, *GD*; ferner ziehe man GB, GC.

Der Kegel *ABC* besteht aus dem ausgehöhlten Kegel *ABGC* und dem Kegel *BGC*, von welchen jener einem Kegel gleich ist, der die konische Oberfläche *ABC* zur Grundfläche, eine Höhe = *GD* = *GF* hat, dieser aber *BC* zur Grundfläche und die nämliche Höhe hat. Die beyden letztern Kegel aber sind dem Kegel *MNO* gleich, der eine Grundfläche, die ihren Grundflächen zusammen gleich, d. i. die ganze Oberfläche und die nämliche Höhe = *GF* hat (E. XII, 11. V, 24). Folglich ist auch der Kegel *ABC* dem Kegel *MNO* gleich.

(*L. II. Prop II.*)

§. 7. Daher verhält sich jeder um eine Kugel beschriebene Kegel zur Kugel, wie die ganze Oberfläche des Kegels zur Oberfläche der Kugel.

Denn da die Kugel einem Kegel gleich ist, dessen Grundfläche der Oberfläche der Kugel und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist (Folg. 5. bey B. 1. üb. K. u. C. S. XXXVII.), der Kegel *MNO* aber die nämliche Höhe hat; so verhält sich der Kegel *MNO* d. i. *ABC* zum Kegel, der der Kugel gleich ist, dat ist, zur Kugel wie die Grundfläche des *MNO* zur Grundfläche des leztern, das ist, wie die ganze Oberfläche des *ABC* zur Oberfläche der Kugel (E. XII, 14).

(*Lib. II. Prop. III.*)

§. 8. Und daher wie das Rechtek aus der Summe der Seite und des Halbmessers der Grundfläche des Kegels und eben diesem Halbmesser $((AB+BF)\times BF)$ zum Quadrat des Durchmessers der Kugel (EF).

Denn krumme Oberfl. d. Keg. ABF : Grundfl. d. $ABF = AB : BF$ (B. I ü. K. u. C. S. XVI),
u. *verb.* ganze Oberfl. d. Keg. ABF : Grundfl. d. $ABF = AB+BF : BF = (AB+BF)\times BF : BF^q$
Aber Grundfl. d. ABF : Oberfl. d. Kugel $= BF^q : EF^q$
(B. I. ü. K. u. C. S. XXXVII, Folg. 1. E. XII, 2)

also *glf.* ganze Oberfl. d. Keg. ABF : Oberfl. d. Kug. d. i. Kegel ABF : Kugel $\Big\} = (AB+BF)\times BF : EF^q$

(*Lib. II. Prop. IV. X. XV.*)

§. 9. Jeder sphäralische Körper ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der ganzen Oberfläche des Körpers und dessen Höhe dem Halbmesser der in den Körper beschriebenen Kugel gleich ist.

Für den durch Umdrehung eines regulären Vieleks von einer Anzal Seiten, welche durch die Zal 4 gemessen

wird, um eine Diagonale entstehenden Körper (Fig. 87. beweist dis Archimedes im I. B. ü. K. u. C., S. XXV XXXII, vermittelst der Säze XIX, XX, XXI des nän ehen Buchs. Auf ähnliche Art wird vermittelst der nä lichen Säze u. §. 3, 5. der Beweis für die anderen Ar sphäralischer Körper geführt.

Iedes der Dreyeke nämlich, in welche das Vielek du vom Mittelpunkt an die Winkel gezogene gerade Lin getheilt wird, namentlich

Fig. 87. b. die ΔΔ *AVN*, *NVO*, *OVC*, und eb die auf der andern Seite von *CV*, des um die D gonale *AB* sich drehenden Vieleks von einer ge den Anzal Seiten, die sich aber nicht durch 4 m sen lässt (vermöge B. I. ü. K. u. C., S. XIX, XXI §.

Fig. 88. a. die ΔΔ *AVN*, *NVC* und die auf der and Seite von *CV* (vermöge der Säze XX und XXI angef.

Fig. 88. b. die ΔΔ *AVN*, *NVO*, *OVC* und die der anderen Seite von *CV* befindlichen (verm des angef. S. XXI, u. §. des um das Loth *AB* sich drehenden Vieleks einer geraden Anzal Seiten, die sich durch 4 n sen lässt (*Fig. 88. b.*) oder nicht (*a.*);

Fig. 89. die ΔΔ *ANV*, *NVC*, *CVO* u. s. w. (verm der angef. S. XX, XXI u. §. des um das Loth *AB* sich drehenden Vieleks von ner ungeraden Anzal Seiten;

beschreibt bey seiner Umdrehung um *AB* eine körperli Figur, die einem Kegel gleich ist, dessen Grundfläche von der im Umfang des Vieleks liegenden Seite des D eks erzeugten Oberfläche der Figur und dessen Höhe Halbmesser der Kugel gleich ist. Folglich ist jeder sphäralischen Körper allen den Kegeln gleich, deren Gru flächen zusammen seiner ganzen Oberfläche gleich sind deren jeder den Halbmesser der in den Körper beschri nen Kugel zur Höhe hat; mithin einem Kegel gleich, die gedachte Höhe und eine Grundfläche hat, die der g zen Oberfläche des Körpers gleich ist.

(*Lib. II. Prop. V. XI. XVII.*)

§. 10. Jeder sphäralische Körper verhält sich zu der darein beschriebenen Kugel wie die ganze Oberfläche des Körpers zur Oberfläche der Kugel.

Denn der Kegel, der dem Körper gleich ist, verhält sich zum Kegel, der der Kugel gleich ist (Folg. 5 bey B. I. ü. K. u. C. S. XXXVII.), weil beyde gleiche Höhe haben, nämlich den Halbmesser der Kugel, wie die Grundfläche des ersten zur Grundfläche des andern, das ist, wie die ganze Oberfläche des Körpers zur Oberfläche der Kugel.

Hieraus ergibt sich ferner:

(*Lib. II. Prop. VI.*) *Fig. 87.*

§. 11. Dass der durch Umdrehung eines regulären Vieleks von einer geraden Anzal Seiten um eine Diagonale entstandene Körper zu der darein beschriebenen Kugel sich verhalte wie die Axe der Figur zur Axe der Kugel.

Denn so verhält sich die cylindrische Oberfläche, die der Oberfläche des Körpers gleich ist, (§. 2.), zur cylindrischen Oberfläche, die der Oberfläche der Kugel gleich ist, (B. I. ü. K. u. C. S. XXXVII. Folg. 4.), da die Durchmesser dieser Oberflächen gleich sind (Folg. 1. bey S. XIV des angef. B.)

(*Lib. II. Prop. XII. XIII.*) *Fig. 88.*

§. 12. Ferner dass der durch Umdrehung eines Vieleks von einer geraden Anzal Seiten um ein Loth entstandene Körper zu der darein beschriebenen Kugel sich verhalte, wie (*AR*) die Summe des Durchmessers der Kugel und der dritten Proportionallinie zum Halbmesser der Kugel und zur halben Seite des Vieleks sich zum Durchmesser der Kugel (*AB*) verhält.

Aus gleichem Grund, wie §. 11.

Oder wie die Quadrate der Diagonale und des Loths zusammen zum doppelten Quadrat des Loths.

Denn $RV:VB=VQ^q:VB^q$
und *verbunden* $RA:VB=VQ^q+VB^q:VB^q$
u. dieHintergl.verdoppelt, $RA:AB=VQ^q+VB^q:2VB^q=NQ^q+AB^q:2AB^q$.

(*Lib. II. Prop. XVII. XVIII.*). *Fig. 89.*

§. 13. Und dass der durch Umdrehung eines regulären Vieleks von einer ungeraden Anzal Seiten um ein Loth erzeugte Körper zu der darein beschriebenen Kugel sich verhalte, wie (AR) die Summe des Loths und der dritten Proportionallinie zum Durchmesser der Kugel und zur halben Seite des Vieleks sich zum Durchmesser der Kugel (SB) verhält.

Wiederum aus gleichem Grund, wie §. 11.

Oder wenn man zu VB, VQ die dritte Proportionallinie nimmt, welche VT seyn wird, wenn der Winkel VQT ein rechter ist; wie $VT+VB+2VQ:4VB$.

Denn da TB, BQ, BV, desgleichen RB, BQ, BS in stetiger Proportion sind, und $BS=2BV$; so ist $TB=2RB$, mithin VB, VR, VT in stetiger arithmetischer Proportion, und $2VR=VT+VB$. Folglich $AR:SB$, d. i. $VR+VQ:2VB=2VR+2VQ:4VB=VT+VB+2VQ:4VB$.

Weiter lässt sich aus dem bisherigen das Verhältnis jedes der dreyerley sphäralischen Körper zu der darum beschriebenen Kugel herleiten (§. 14-16.). Nämlich

(*Lib. II. Prop. VII. VIII. IX.*) *Fig. 90.*

§. 14. Die Kugel verhält sich zu einem durch Umdrehung eines regulären Vieleks von einer geraden

Anzal Seiten um eine Diagonale in die Kugel beschriebenen Körper wie das Quadrat des Durchmessers der Kugel zum Quadrat des Loths des Vieleks.

Denn es sey auch in den Körper eine Kugel beschrieben. Und AB sey die halbe Diagonale, AC ein Loth auf die Seite des Vieleks; CD auf AB, DE auf AC senkrecht. So sind AB, AC, AD, AE stetig proportionirt; und

die umbeschr. Kug. : einbeschr. Kug. $= AB : AE$, nämlich im tripl. Verh. von $AB : AC$ (E. XII. 18.)

Aber die einbeschr. Kug. : Körper $= AC : AB$ (§. 11);

folgl. die umbeschr. Kug. : Körper $= AC : AE = AB : AD = AB^q : AC^q =$ Quadrat des Durchmessers : Quadrat des Loths.

Hieraus erhellt, dass das Verhältnis der umbeschriebenen Kugel zum Körper das duplicirte von demjenigen ist, welches der Körper zur einbeschriebenen Kugel hat.

Aber die Oberfläche der um den genannten Körper beschriebenen Kugel hat zur Oberfläche des Körpers das nämliche Verhältnis, welches die Oberfläche des Körpers zur Oberfläche der darein beschriebenen Kugel hat; oder die Oberfläche des Körpers ist die mittlere Propotrionalfläche zwischen den Oberflächen der beyden Kugeln.

Denn d. Oberfl. der umb. Kug. : Oberfl. d. einb. Kug. $= AB^q : AC^q = AB : AD$ (Folg. I. bey B. I. ü. K. u. C. S. XXXVII.)

und die Oberfl. des Körpers : Oberfl. d. einb. Kug. $= AB : AC$ (§. 11.) $= AC : AD$.

Und da AB, AC, AD stetig proportionirt sind, so sind die Oberflächen der umbeschriebenen Kugel, des Körpers, und der einbeschriebenen Kugel, welche sich wie AB, AC, AD verhalten, auch stetig proportionirt.

(*Lib. II. Prop. XIV.*) *Fig. 91.*

§. 15. Die Kugel verhält sich zu einem durch Umdrehung eines regulären Vieleks von einer geraden Anzal Seiten um ein Loth in die Kugel beschriebenen Körper, wie der Durchmesser der Ku-

gel ($2AB$) zur Summe der zweyten und vierten (AC, AE) von vier stetigen Proportionallinien im Verhältnis des Halbmessers der Kugel (AB) zum halben Loth des Vieleks (AC); (indem wiederum CD, DE auf AB, AC senkrecht sind.)

Denn die umbeschr. Kugel: einbeschr. Kugel $= AB : AE = 2AB : 2AE$

die einbeschr. Kugel: Körper $= 2AC^q : AC^q + AB^q$ (§. 12) $= 2AE : AC + AE$

(denn $ABq : ACq = AB : AD = AC : AE$ und verbunden und die Hinterglieder verdoppelt, $ABq + ACq : 2ACq = AC + AE : 2AE$; und umgekehrt)

also *glf.* die umbeschr. Kugel: Körper $= 2AB : AC + AE$.

(*Lib. II. Prop. XIX.*) *Fig. 92.*

§. 16. Die Kugel verhält sich zu einem durch Umdrehung eines regulären Vieleks von einer ungeraden Anzal Seiten um ein Loth in die Kugel beschriebenen Körper, wie viermal die vierte zur Summe der dritten, der ersten und der doppelten zweyten von vier stetigen Proportionallinien im Verhältnis von AC zu AB (d. i. wie $4AE : AD + AC + 2AB$, wenn ABD, ADE rechte Winkel sind.)

Denn die umbeschr. Kugel: einb. Kugel $= AE : AC = 4AE : 4AC$,

die einbeschr. Kugel: Körper $= 4AC : AD + AC + 2AB$ (§. 13);

asso *glf.* die umbeschr. Kugel: Körper $= 4AE : AD + AC + 2AB$.

(*Lib. II. Prop. III. Coroll. Prop. XXX. XXXI.*) *Fig. 86.*

§. 17. Ist der um die Kugel beschriebene Kegel (§. 6.) gleichseitig (durch Umdrehung eines gleichseitigen Dreyeks um ein Loth entstanden); so ist, wenn von B an den Mittelpunkt G die BG gezogen wird, welche auch den Winkel

ABC halbirt (E. IV, 4.), $AG : GF = AB$ d. i. $BC : BF$ (E. VI, 3) $= 2 : 1$. Daher $AF = \frac{3}{2} EF$. Und es ist $(AB + BF) \times BF = AF^q$, beyde nämlich $= \frac{3}{4} AB^q$. Folglich $(AB \times BF) \times BF = \frac{9}{4} EF^q$. Mithin ist (§. 8) der um die Kugel beschriebene gleichseitige Kegel $\frac{9}{4}$ der Kugel, also $\frac{3}{2}$ des um die nämliche Kugel beschriebenen Cylinders (B. I. ü. K. u. C. S. XXXVII.)

Unmittelbar so: Man gedenke sich in der Halbkugel den Kegel HFI. Da AG d. i. $BG = 2GF$, so ist $BG^q = 4GF^q$, $BF^q = 3GF^q$ mithin der Kreis um BC das Dreyfache vom Kreis um HI. Und es ist

Kegel ABC: Kegel HFI im zusammenges. Verh. von
Kreis um BC: Kreis um HI, u. $AF : FG$, d. i. von
$3 : 1$ und $3 : 1$
mithin im Verhältnis $9 : 1$;
Aber Kegel HFI: Kugel = $1 : 4$.

Also *glf.* Kegel ABC: Kugel = $9 : 4$.

Wenn demnach ein gleichseitiger Kegel und ein Cylinder um eine Kugel beschrieben sind, so sind der Kegel, der Cylinder und die Kugel in stetiger Proportion, deren Exponent $\frac{3}{2}$ ist (in continua proportione sesquialtera). Und ihre Oberflächen sind ebenfalls in dieser Proportion (§. 7. B. I. üb. K. u. C. S. XXXVII.)

Tacquet spricht in seinen Elementis geometriae viel von diesem Saz, den er seinen Theorem. select. ex Archim. beyfügt, ohne dabey Torricellis zu erwähnen.

§. 18. Mehrere dergleichen Particularsäze über Verhältnisse der Kugel zu besondern Arten darum oder darein beschriebener Körper, z. B.

dass die Kugel zu dem in sie beschriebenen gleichseitigen Kegel sich verhalte wie $32 : 9$,

dass die Kugel zu dem darein beschriebenen Cylinder sich verhalte, wie die Diagonale eines Quadrats zu $\frac{3}{4}$ seiner Seite,

dass ein um die Kugel beschriebener gleichseitiger Rhombus zur Kugel sich verhalte wie die Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite,

dass der durch Umdrehung eines regulären Sechseks um ein Loth beschriebene Körper $\frac{7}{6}$ der darein beschriebenen Kugel sey, u. s. w.

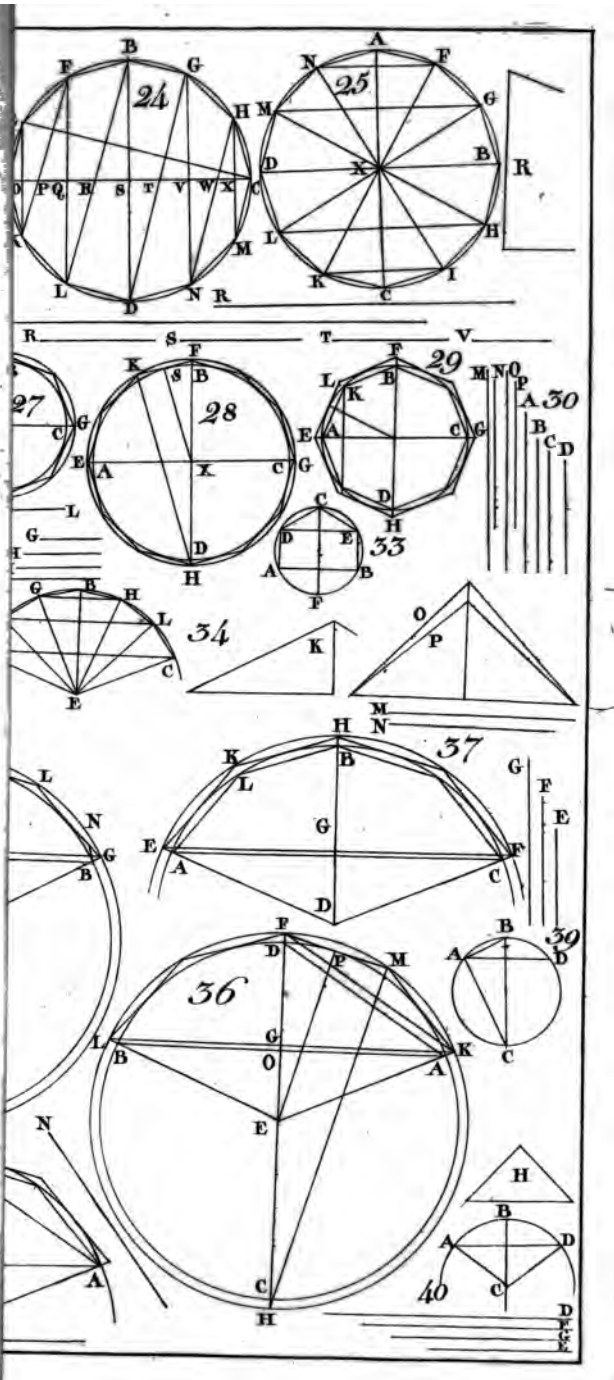
beweist Torricelli (L. II. Propp. XXVIII — XXXIX) unmittelbar vermittelst Euklidischer Säze, bemerkt aber, dass sie aus den allgemeinen Säzen (§. 6 — 16.) als Corollarien hergeleitet werden können.

§. 19. Er bestimmt endlich (Propp. XXIII — XXVII. XLIV — LII) die Verhältnisse eines jeden um oder in eine Kugel beschriebenen sphäralischen Körpers von den dreyerley in Erkl. 2. angezeigten Arten zu irgend einem um oder in die nämliche oder eine andere Kugel beschriebenen von der nämlichen oder einer andern Art von ebendenselben dreyerley genannten; welche Verhältnisse wiederum aus den allgemeinen Säzen (§. 11 — 16) leicht hergeleitet werden können.

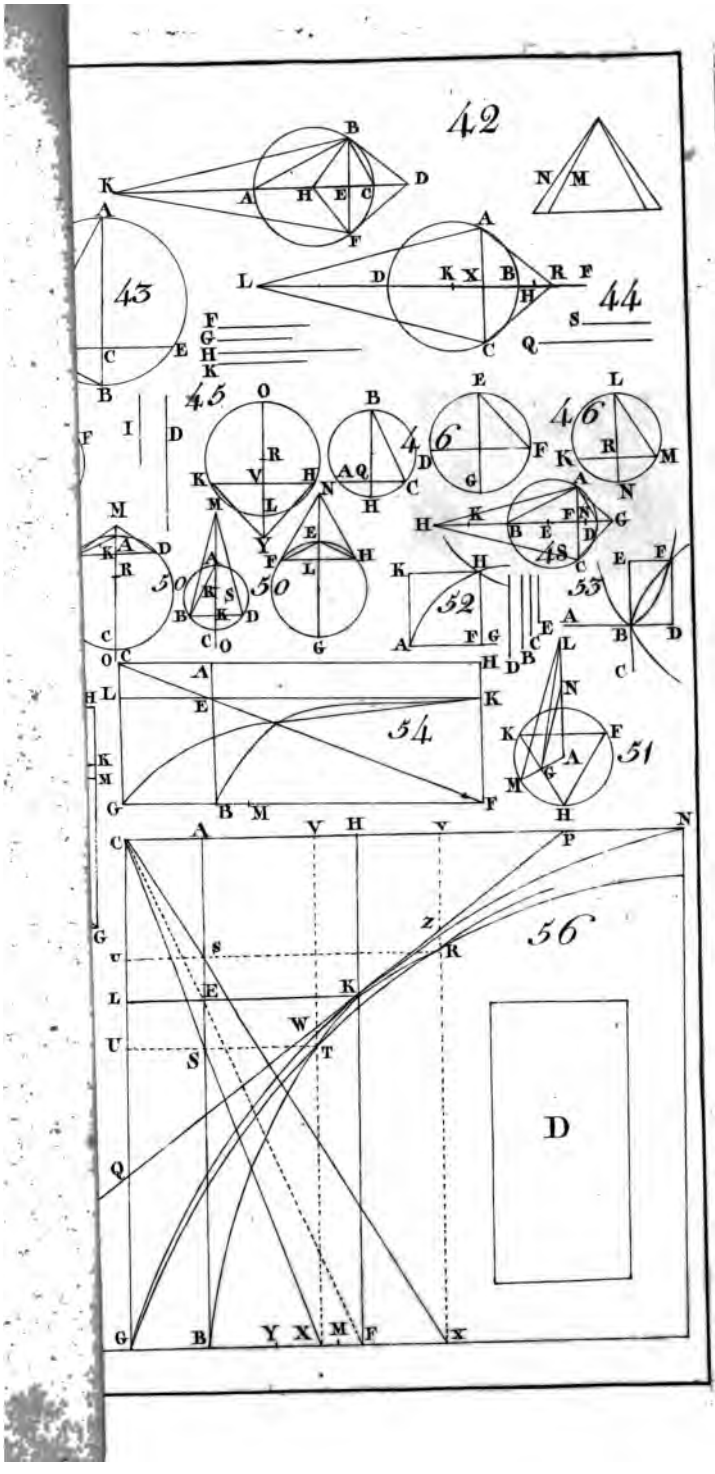
Verbesserungen.

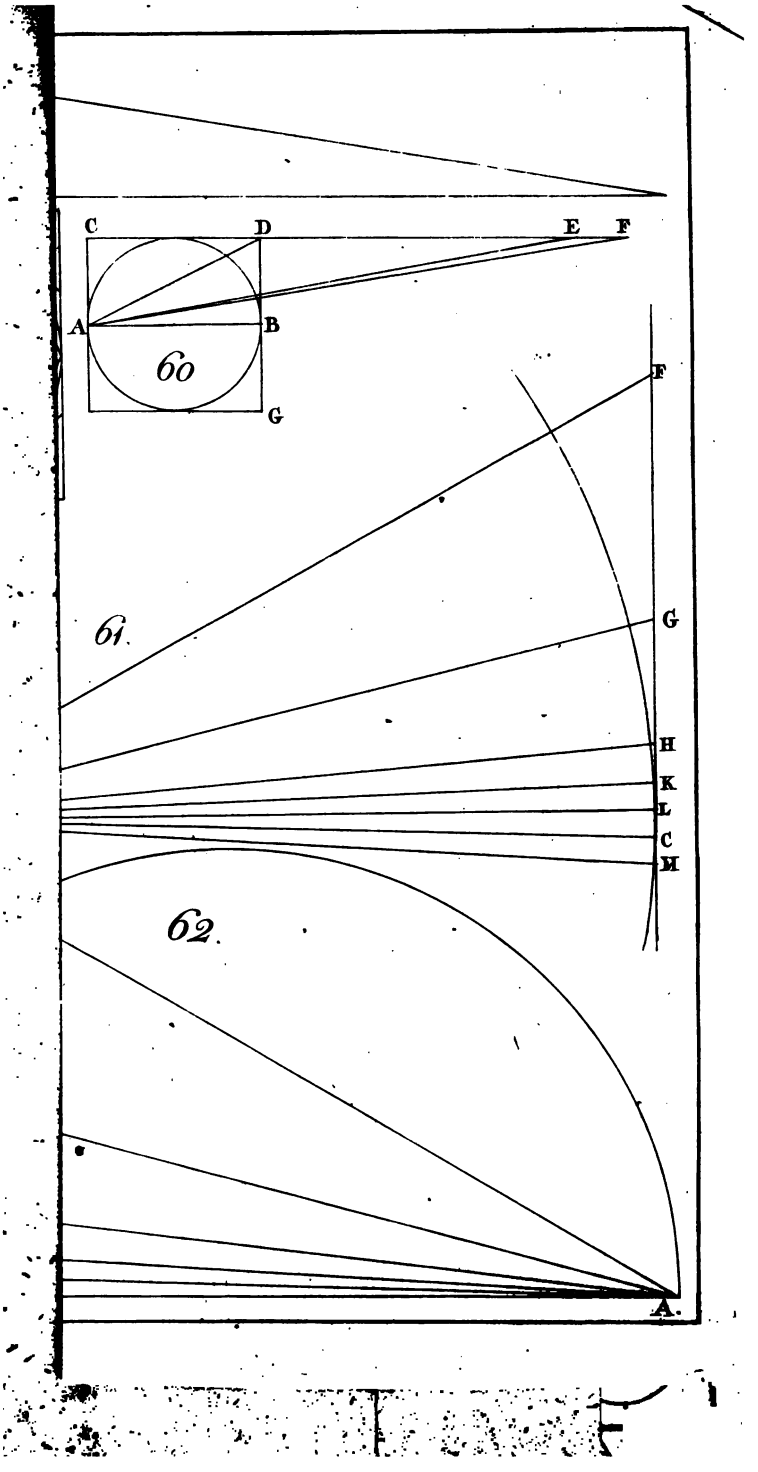
S. 2. Z. 5; *lese man* Durchmesser *statt* Halbmesser.
— 13. — 2 *der Anm.*; I, 8. *statt* XII, 10 Conv.
— 15. — 4; II *st.* 10.
— — — 21, 22; dem Abschnitt *ABC st.* den Abschnitten *AGB, BFC*
— — — 30; — — Also sind (ebenfalls oder) um s. v. m.
— 17. — 27, 28; dem Parallelogramm *st.* den Parallelogrammen
— 19. — 17; Man ziehe (an *B* die Mitte des Bogens *ABC*) die Tangente —
— — — 25; — Die ersteren Parallelogramme seyen —
— 21. — 14; Grundflächen *st.* Grundfläche; *Z. 6. v. unten; B st. C*
— 22. *lezt.* Z.; XIII. *st.* XV.
— 28. Z. 8; und *st.* um. *Z. 23;* Quadrat des Halbmessers *st.* Halbmesser.
— 29. — 7; — — — Grundflächen und Höhen mit — —
— 30. — 29; *ist* des Kegels, *auszustreichen.*
— 31. — 25; des *st.* der; *S. 32. Z. 19;* Und *st.* Ung
— 41. — 8. *v. unten;* Die *st.* Der. *S. 42. Z. 24;* einer *st.* iner.
— 46. — 29; wiesen *st.* schrieben. *S. 49. Z. 15;* — — Kugel: und — —
— 58. *Anm.* Z. 1; Sehne *st.* Seite. *S. 60. Z. 13 v. unten* — *Z. lezte;* (Da — — — — dieser Kreis.)
— 135. — 14; Kreisabschnitts *st.* Kreisausschnitts.

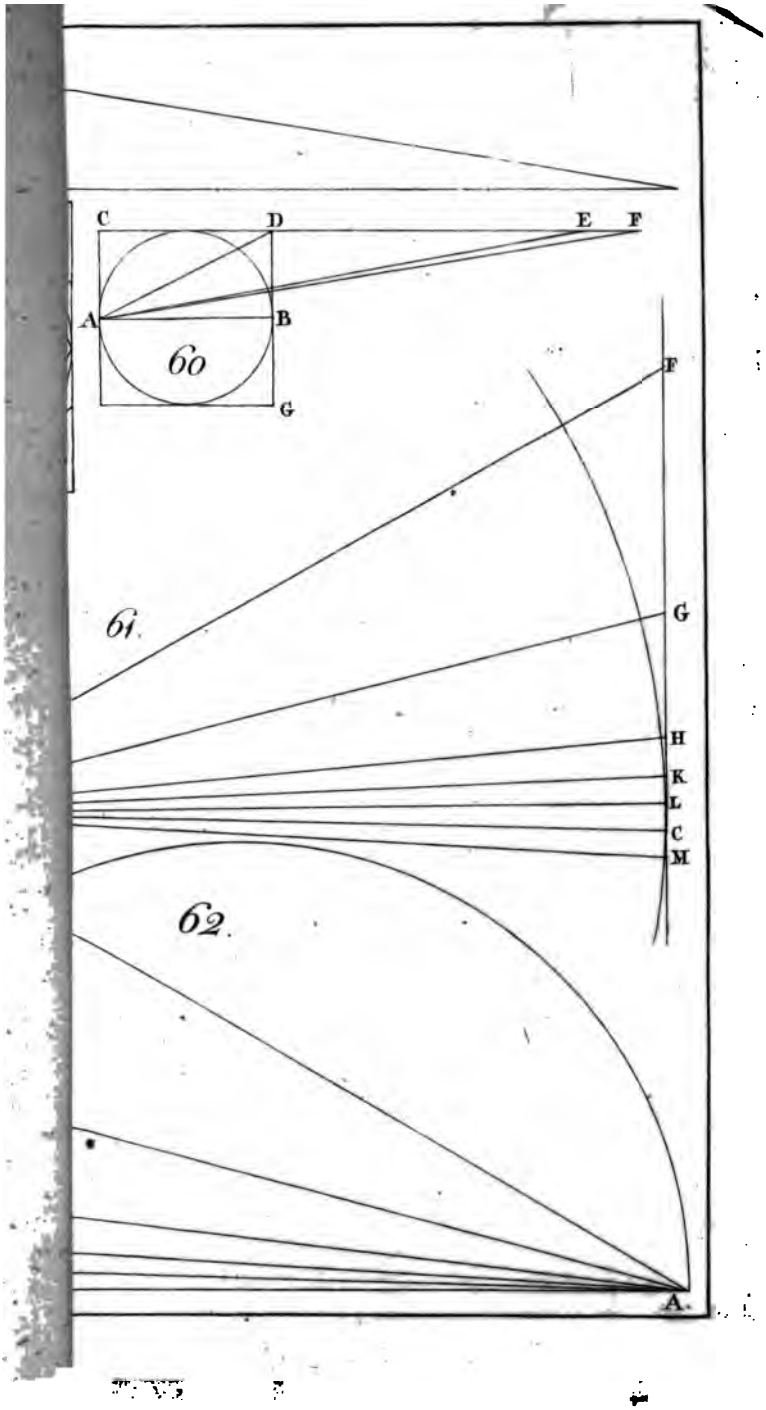
In *Fig. 50.* soll *L* beym Mittelpunkt stehen, und *FH* durch den Mittelpunkt gehen.

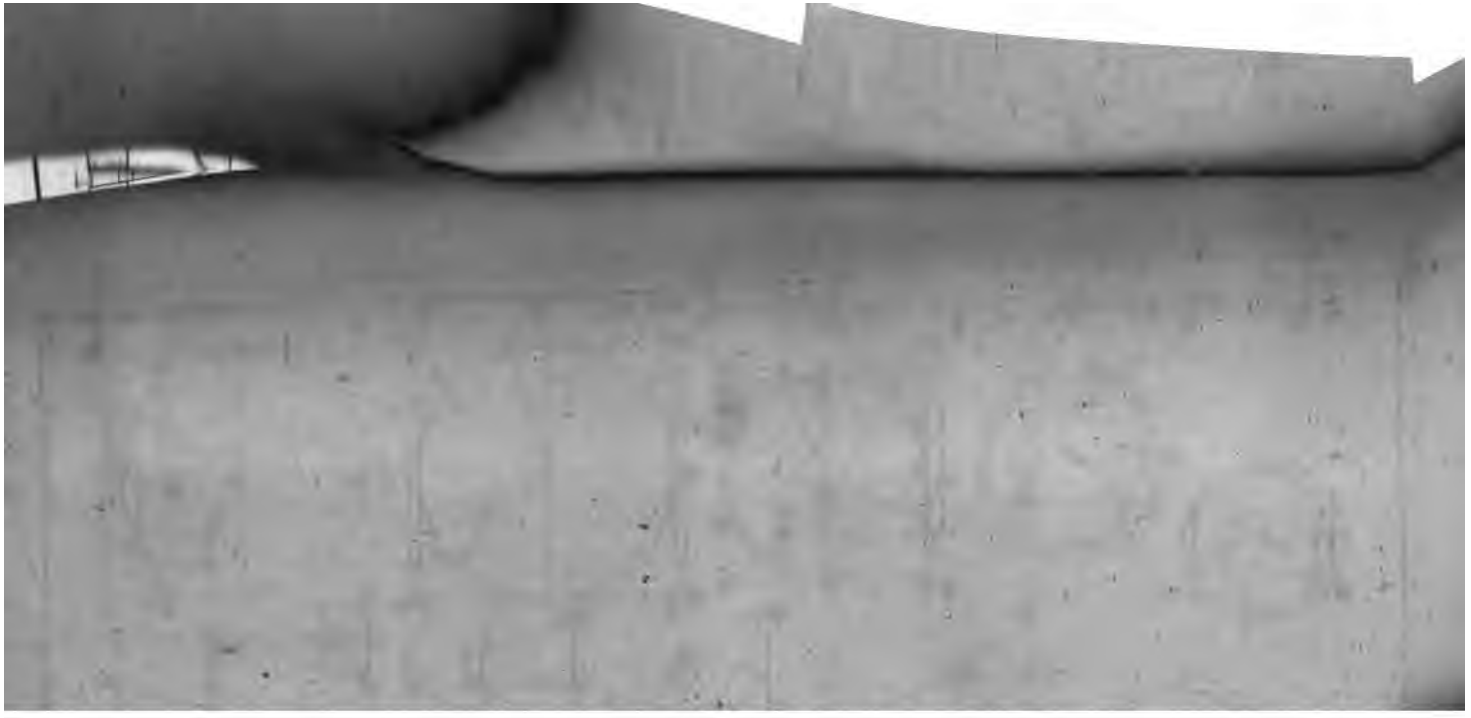


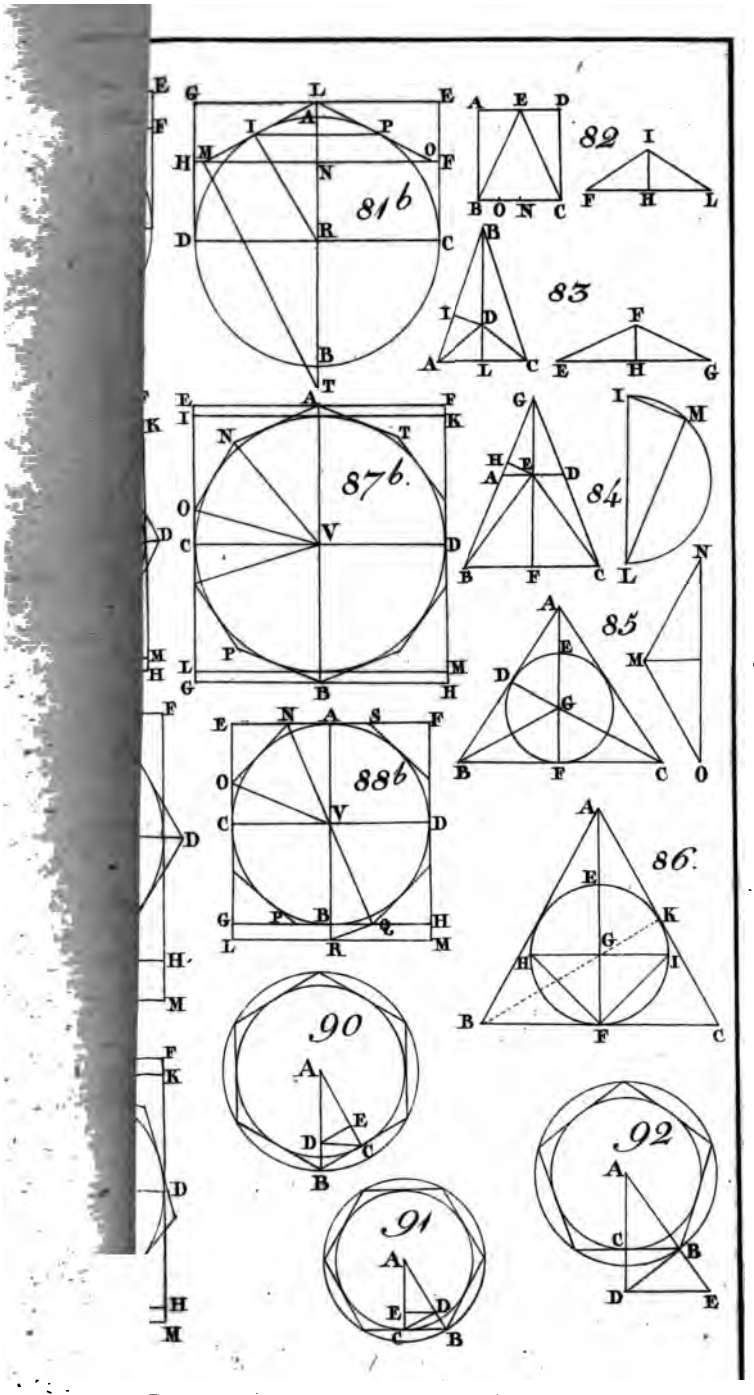
Archimed


42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
56
D


C
D
E
F
A
B
60
G
F
61.
G
H
K
L
C
M
62.
A.


C
D
E
F
A
B
60
G
F
61.
G
H
K
L
C
M
62.
A.




81b
82
83
87b.
84
85
88b
86.
90
91
92

H.M